۱)

میرای بحرانی است پس، $\zeta = 1$.

پاسخ به ورودی ضربه:

$$R(s) = 1 \Rightarrow \ C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\omega_n\, s+\omega_n^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t) = \omega_n^2\, t\, e^{-\omega_n t} \ \ ,t > 0$$

محاسبه حساسیت:

$$S_{\omega_n}^{c} = \frac{dc}{d\omega_n}.\frac{\omega_n}{c} = [2\omega_n t\, e^{-\omega_n t} - t^2\omega_n^2 e^{-\omega_n t}] \times \frac{\omega_n}{\omega_n^2\, t\, e^{-\omega_n t}} \ \ ,t > 0$$

$$t = 1 \Rightarrow [2\omega_n\, e^{-\omega_n} - \omega_n^2 e^{-\omega_n}] \times \frac{1}{\omega_n\ \ e^{-\omega_n}} = \ 2 - \omega_n$$

۲)

سیستم حلقه باز:

$$\Delta_{OL}(s) = \ s^3 + 2s^2 + 2s + k_2$$

Routh-Hurwitz:

S^3	۱	2
S^2	۲	k_2
S^1	$(4-k_2)/2$	0
S^0	k_2	0

$$\begin{cases} 4 - k_2 > 0 \\ \ \ k_2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < k_2 < 4$$

سیستم حلقه بسته:

$$\Delta_{CL}(s) = \ s^3 + 2s^2 + 2s + k_1 + k_2$$

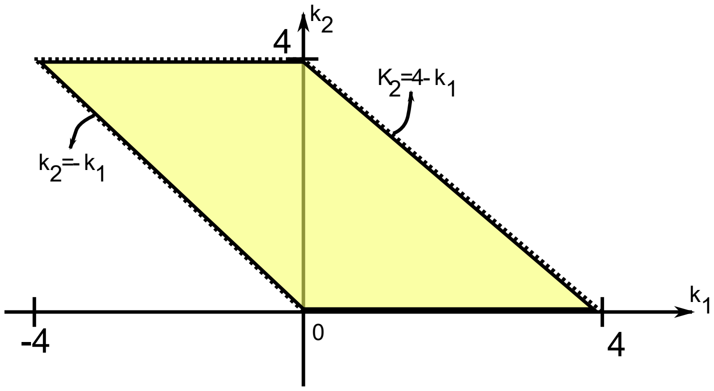
Routh-Hurwitz:

S^3	۱	2
S^2	۲	$k_1 + k_2$
S^1	$4 - k_1 - k_2$	0
S^0	$k_1 + k_2$	0

$$\begin{cases} 4 - k_1 - k_2 > 0 \\ k_1 + k_2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 < 4 - k_2 \\ k_1 > -k_2 \end{cases}$$

با توجه به روابط به دست آمده، ناحیه خواسته شده را رسم میکنیم:



۳)

مقدار حالت ماندگار ورودی تقریباً ۹ ولت است و مقدار حالت ماندگار خروجی، تقریباً ۶ ولت است. پس داریم:

$$G(0) = \frac{6}{9} = 0.666$$

$$OS\% = \left(\frac{7.5}{6} - 1\right) * 100 = 25\%$$

$$\zeta = -\frac{\ln\left(\frac{OS\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(O\frac{OS\%}{100}\right)}} = \frac{1.3863}{\sqrt{\pi^2 + 1.9218}} = 0.4$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}} = 12027.2$$

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.667 * 12027.2^2}{s^2 + 2 \times 12027.2s + 12027.2^2}$$

$$= \frac{96.5 * 10^6}{s^2 + 9622s + 14.5 * 10^7}$$

۴)

$$G(s) = \frac{0.6K + 10Ks^2 + 60.1Ks}{s^5 + 130s^4 + 3229s^3 + 10(K + 2348)s^2 + (60.1K + 58000)s + 0.6K}$$

s^5	1	3229	60.1K+58000
s^4	130	10K+23480	0.6K
s^3	$-10K + 396290$	7812.4K+7540000	0
s^2	$\frac{-100K2 + 2712488K + 8.3247E9}{-10K + 396290}$	0.6K	0
s^1	$\frac{7813E3K4 - 5.1401E11K3 + 7.2469E15K2 + 3.3213E19K + 2}{1000K3 - 66753880K2 + 9.9168E11K + 3.299E15}$	0	0
s^0	$0.6K$	0	0

سطر s3 در ۱۳۰ ضرب شده است. سطر s1 به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\frac{7813000(K - 39629)(K + 967.31586571671)(K + 2776.9294183336)(K - 29908.070615165)}{1000(K - 39629)(K + 2783.405672635)(K - 29908.285672635)}$$

سطر s0 سطر s3: سطر s2: سطر s1:	K > 0 K < 39629 K < 29908.29; 39629 < K 29908.29 < K, or K < 29908.07;

پس نتیجه می شود که:

0 < K < 29908.07

۵)

الف) معادله مشخصه حلقه بسته:

$$\Delta = 1 + G_c G_p = 0 \rightarrow 1 + \frac{(s - 2.2)}{(s + 2)} . \frac{(s + 3.2)}{(s - 2.2)(s + 5.1)} = 0$$

$$(s + 2)(s^2 + 2.9s - 11.22) + s^2 + s - 7.04 = 0$$

$$\Delta = s^3 + 5.9s^2 - 4.42s - 29.48 = 0$$

$\Delta \;=\; s^3 + 5.9s^2 - 4.42s - 29.48 = 0$

s^3	1	-4.42
s^2	5.9	-29.48
s^1	0.58	0
s^0	-29.48	0

به دلیل تغییر علامت در جدول راث هرویتز، سیستم ناپایدار است.

ب)

$$\Delta = 1 + G_c G_p = 0 \rightarrow 1 + \frac{(s-2.2)}{(s+2)} . \frac{(s+3.2)}{(s-2.2)(s+5.1)} = 1 + \frac{1}{(s+2)} . \frac{(s+3.2)}{(s+5.1)} = 0$$

$(s+2)(s+5.1) + s + 3.2 = 0$

$\Delta \;=\; s^2 + 8.1s + 13.4 = 0$

معادله مشخصه درجه ۲ است و ریشه‌های آن هر دو منفی و حقیقی بوده بنابراین سیستم پایدار است. باید توجه داشت که چون از تخمین استفاده می‌کنیم، تضمینی وجود ندارد که صفر کنترلر دقیقا با قطب ناپایدار سیستم برابر شود، بنابراین در عمل نمی‌توان این ساده سازی را انجام داد.

۶)

الف)

$$Js^2\theta + Bs\theta = K(\theta_r - \theta)$$

$$Js^2\theta + Bs\theta + K\theta = K\theta_r$$

$$\frac{\theta}{\theta_r} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K}$$

ب)

$$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.1$$
$$\rightarrow \zeta = 0.591$$

$$\frac{\theta}{\theta_r} = \frac{1.667 \times 10^{-6}\, K}{s^2 + \frac{1}{30}s + 1.667 \times 10^{-6}\, K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{30} \rightarrow \omega_n = \frac{\frac{1}{30}}{2(0.591)} = 0.0282\,\frac{rad}{sec}$$

$$\omega_n^2 = 1.667 \times 10^{-6} K$$

$$K < 477$$

ج)

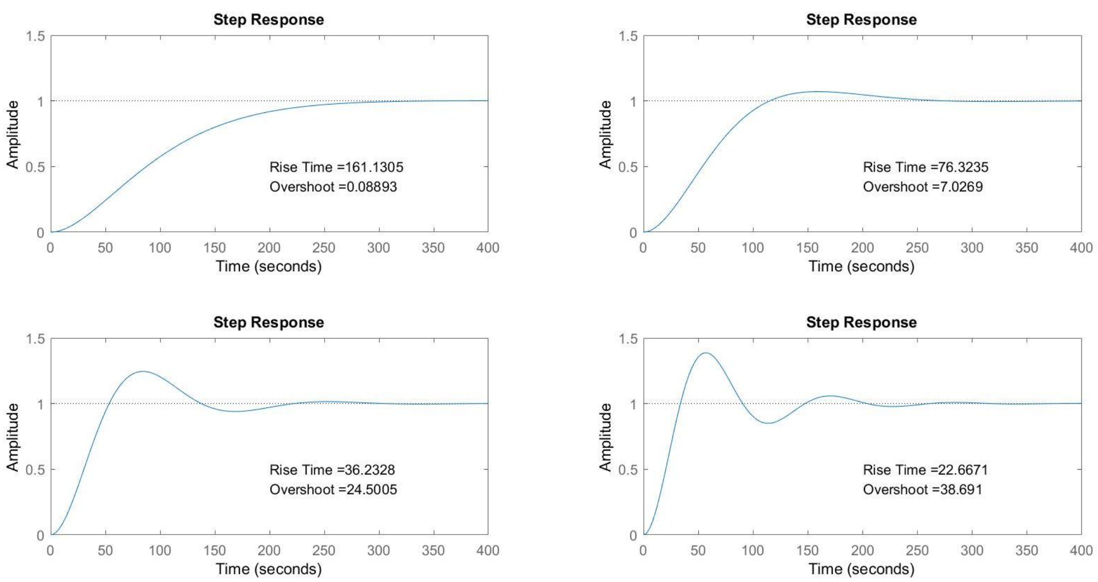
$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{30} \rightarrow \zeta = \frac{1}{60\omega}$$

استفاده از تقریب درجه دو که در اسلاید ۳۲ ذکر شده:

$$t_r = \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} < 80 \rightarrow \omega_n < 0.025$$
$$\omega_n^2 = 1.667 \times 10^{-6} K$$

$$K > 374$$

د)



۷)

می‌دانیم که فراجهش ۵٪ معادل با $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است. حال از روی زمان نشست محاسبه می‌شود.

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.4 \Rightarrow \xi\omega_n = 10 \Rightarrow \omega_n = 10\sqrt{2}$$

بنابراین معادله مشخصه سیستم باید عامل درجه دو می به صورت زیر داشته باشد

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 20s + 200$$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته به صورت زیر است:

$$\Delta(s) = s^3 + 20s^2 + Ks + Ka = 0$$

معادله مشخصه را بر چند جمله ای مطلوب $s^2 + 20s + 200$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{c|c} s^3 + 20s^2 + Ks + Ka & s^2 + 20s + 200 \\ \cline{2-2} s^3 + 20s^2 + 200s & s \\ \hline (K-200)s + Ka & \end{array}$$

برای بخش پذیری باید باقیمانده برابر صفر باشد:

$$\begin{cases} K - 200 = 0 \\ Ka = 0 \end{cases} \Rightarrow K = 200,\ a = 0$$

سوال امتیازی)

با توجه به نکات گفته شده در مورد حذف اثر اغتشاش در حالت ماندگار، برای این که خطای حالت ماندگار ناشی از اغتشاش صفر باشد باید سیستم پایدار بوده و کنترل کننده شامل قطب‌های ورودی اغتشاش باشد. بنابراین با توجه به تبدیل لاپلاس سیگنال sint، کنترل کننده را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$D(s) = \mathcal{L}[d(t)] = \mathcal{L}[\sin\ t] = \frac{1}{s^2 + 1}$$
$$G_c(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1}$$

حال باید با تشکیل معادله مشخصه سیستم، پایداری سیستم را بررسی کنیم.

$$\Delta(s) = 1 + G_c(s)G(s) = 0$$
$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + (2 + a)s + b = 0$$

جدول رات را برای معادله مشخصه بالا به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

s^4	1	1	b
s^3	2	$2+a$	
s^2	$-0.5a$	b	
s^1	$\dfrac{a^2+2a+4b}{a}$		
s^0	b		

از جدول راث در می‌یابیم که یکی از شرط‌های پایداری این است که a < ۰ باشد. واضح است که به ازای a=-1 و b=0.1 تغییر علامتی در ستون اول دیده نمی شود و سیستم پایدار است. پس یکی از کنترل کننده‌های پایدار کننده سیستم به صورت زیر می‌تواند باشد.

$$G_c(s) = \frac{-s+0.1}{s^2+1}$$

تبدیل لاپلاس سیگنال خطای ناشی از اغتشاش برابر است با:

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1+G_c(s)G(s)} = \frac{1}{s(s+2)+\dfrac{as+b}{s^2+1}}$$

$$E_D(s) = -C_D(s) = \frac{-1}{s(s+2)+\dfrac{-s+0.1}{s^2+1}}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$= \frac{-1}{s(s+2)(s^2+1)-s+0.1}$$

با استفاده از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$e_{dss}(s) = \lim_{s\to 0} sE_D(s) = 0$$

از طرفی برای این که خروجی بتواند ورودی مرجع را ردیابی کند (خطای حالت ماندگار صفر باشد) باید توابع تبدیل حلقه شامل قطب‌های ورودی مرجع باشد چون تابع تبدیل حلقه به صورت زیر می‌باشد بنابرین به ازای ورودی پله و sin t خطای حالت ماندگار صفر می‌شود.

$$G_c(s)G(s) = \left[\frac{A(s)}{s^2+1}\right]\left[\frac{1}{s(s+2)}\right]$$

موفق باشید.