دانشکده مهندسی برق
گروه کنترل و سیستم
نیم‌سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

سیستم‌های کنترل خطی

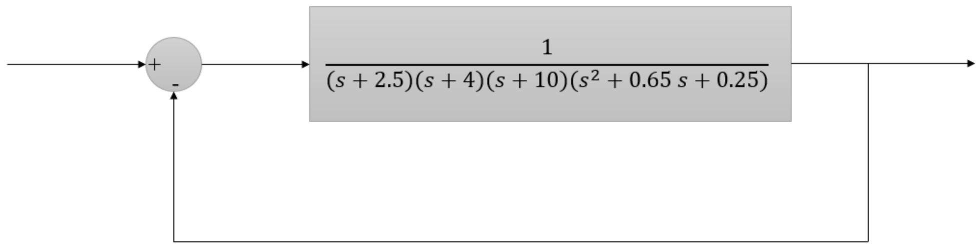
تمرین حل‌شده دوم

۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
استاد: حمید رضا تقی راد

۱) برای محاسبه پاسخ پله سیستم حلقه بسته، می‌توان تابع تبدیل $G(s)$ را توسط قطب های غالب آن تقریب زد. (توجه داشته باشید که مقدار حالت ماندگار سیستم اصلی و سیستم تقریب زده شده باید برابر هم باشد)

الف) سیستم زیر را با روش ذکر شده به تابع درجه ۲ تبدیل کنید

ب) سپس گین کنترلی K را به عنوان کنترلر سیستم در نظر بگیرید و آن را طوری تعیین کنید که میزان اورشوت کمتر از ۱۰ درصد و زمان نشست تقریبا برابر ۴ ثانیه شود. آیا با یک K می‌توان به هر دو هدف دست یافت؟



حل:

الف) چون ریشه های معادله $s^2 + 0.65\ s + 0.302$ برابر $-۰.۳۲۵۰ \pm\ ۰.۴۴۳۱i$ است، قطب‌هایی که در ۲.۵-، ۴- و ۱۰- قرار دارند قطب‌های دور محسوب می‌شوند. فقط باید درنظر داشت طبق نکته اشاره شده در صورت سوال، مقدار نهایی سیستم حلقه بسته نباید تغییر کند. پس سیستم ساده شده به صورت زیر خواهد شد:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2.5)(s+4)(s+10)(s^2+0.65\ s+0.302)}$$

$$G(s) \approx \frac{\frac{1}{100}}{s^2+0.65\ s+0.302}$$

ب) با اضافه کردن گین کنترلی خواهیم داشت:

$$H = \frac{GK}{1+GK} = \frac{0.01K}{s^2+0.65\ s+0.302+0.01K}$$

برای محاسبه ζ خواهیم داشت:

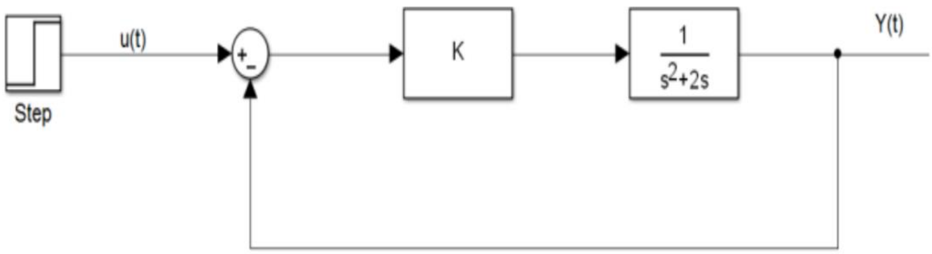
$$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.1$$
$$\rightarrow \zeta = 0.591$$

در نهایت K را با استفاده از ω_n محاسبه می‌کنیم:

$$\omega_n = \frac{0.65}{2\zeta} = 0.5497$$
$$\omega_n^2 = 0.25 + 0.01K \rightarrow K = 5.224$$

چون ضریب $2\zeta\omega_n$ همواره ثابت و برابر ۰.۶۵ است، زمان نشست قابل تغییر نیست. پس با یک گین کنترلی امکان زمان خیز وجود ندارد.

۲) سیستم زیر را در نظر بگیرید:



الف) به ازای $K = 4$ خطای ماندگار، فراجهش و زمان نشست را برای ورودی پله بدست آورید.

ب) می‌خواهیم فراجهش بیشینه، ۵٪ شود. مقدار K را حساب کنید.

ج) پاسخ سیستم مربوط به بند (ب) را شبیه سازی نمائید و نتایج را مقایسه کنید.

حل:

الف) به ازای $K = 4$ در سیستم حلقه بسته داریم:

خطای حالت دائم:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+4\frac{1}{s^2+2s}} = \frac{s^2+2s}{s^2+2s+4}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{s^2+2s}{s^2+2s+4}\,\frac{1}{s} = 0$$

فراجهش و زمان نشست:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{4}{s^2+2s}}{1+\frac{4}{s^2+2s}} = \frac{4}{s^2+2s+4} \Rightarrow \quad \omega_n = 2,\ \xi = 0.5$$

$$MP\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} * 100 = \ 16.3\%$$

$$t_s = \frac{3.2}{\xi\omega_n} = \ 3.2$$

ب)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2+2s+k} \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{k},\ \xi = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

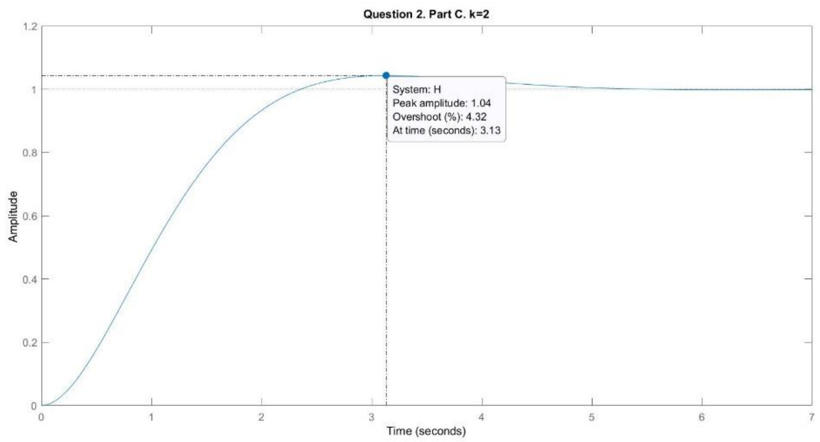
$$MP\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} < 5\% \Rightarrow \xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathrm{k} = 2$$

ج)

کد متلب:

```
%% Question 2. Part C.
clear; clc; close all;

H = tf([2],[1,2,0])
H = feedback(H,1)

p = stepplot(H)
title("Question 2. Part C. k=2")
```



در نمودار رسم شده با نرم افزار متلب می‌بینیم که حداکثر فراجهش به مقادیر نظری نزدیک است.

۳) سیستم مرتبه سه زیر را در نظر بگیرید:

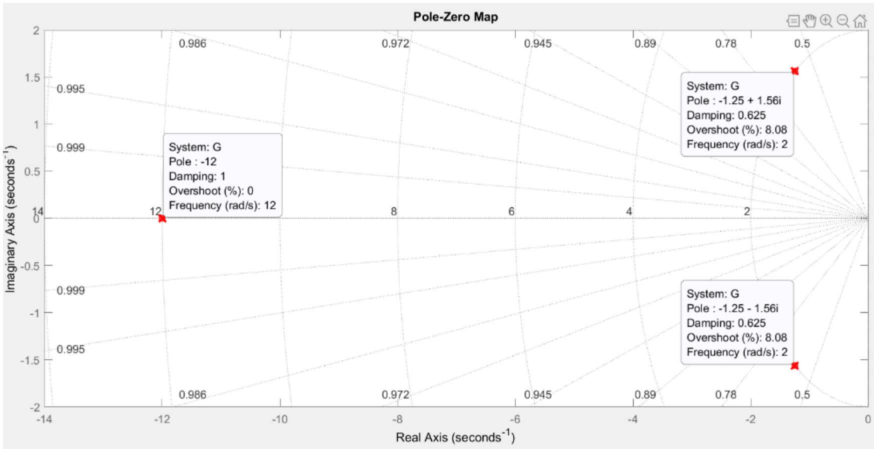
$$G(s) = \frac{10}{(s^2 + 2.5s + 4)(s + a)}$$

الف) فرض کنید $a = 12$. یک تقریب مرتبه دو از سیستم بدست آورید. سپس فراجهش، زمان نشست و همچنین خطای ماندگار به ورودی پله واحد را محاسبه کنید.

ب) به ازای مقادیر $a = 4$ نیز یک تقریب مرتبه دو از سیستم بدست آورید. برای $a = 12$ و $a = 4$ پاسخ پله سیستم و تقریب مرتبه دو آنها را با استفاده از متلب رسم کرده و با هم مقایسه کنید. دلیل تفاوت مقدار خطای تقریب در دو حالت چیست؟

حل)

الف) سیستم داده شده سه قطب دارد، که عبارت‌اند از: $s = -12$ و $s = -1.25 \pm 1.5612i$.



می‌بینیم که قطب حقیقی بسیار سریع تر(چپ‌تر) از قطب‌های مختلط است. پس می توانیم به عنوان قطب غیر غالب از آن صرف نظر کنیم. پس G(s) تقریبا برابر است با:

$$G'(s) = \frac{10/12}{s^2+2.5s+4} = \frac{5}{24}\frac{4}{s^2+2.5s+4} \Rightarrow \omega_n = 2,\ \xi = \frac{5}{8}$$

حداکثر فراجهش:

$$MP\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} * 100 = 8.08\%$$

زمان نشست:

$$t_s = \frac{3.2}{\xi\omega_n} = 2.56s$$

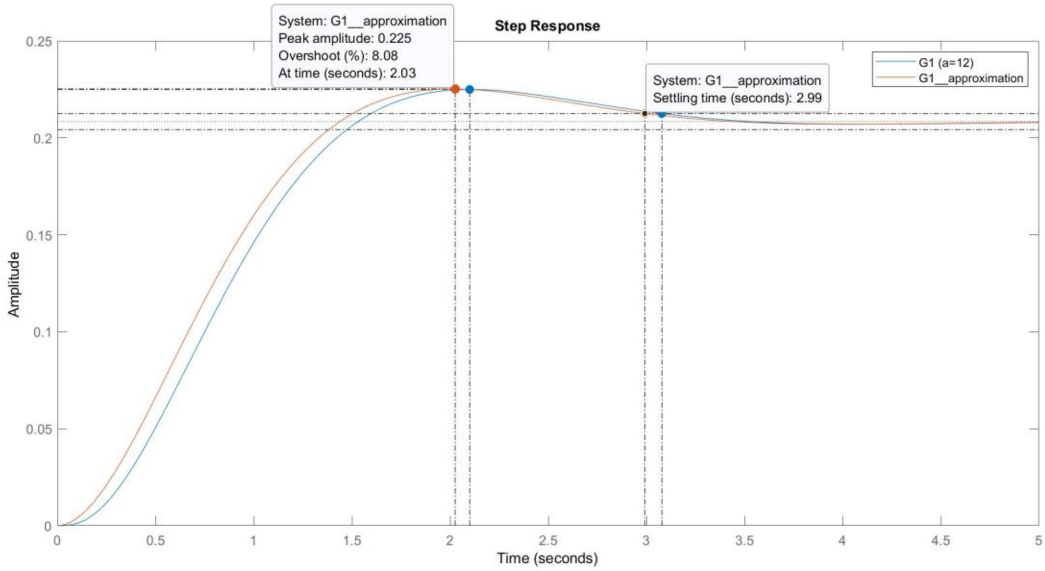
خطای حالت ماندگار:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G(s)R(s) \Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - G(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(1 - G(s)\right)\frac{1}{s} = e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(1 - \frac{10/_{12}}{s^2+2.5s+4}\right) = 1 - \frac{10}{48} = 0.79$$

ب) به ازای a=12 پاسخ پله سیستم و تقریب آن را رسم کردیم:

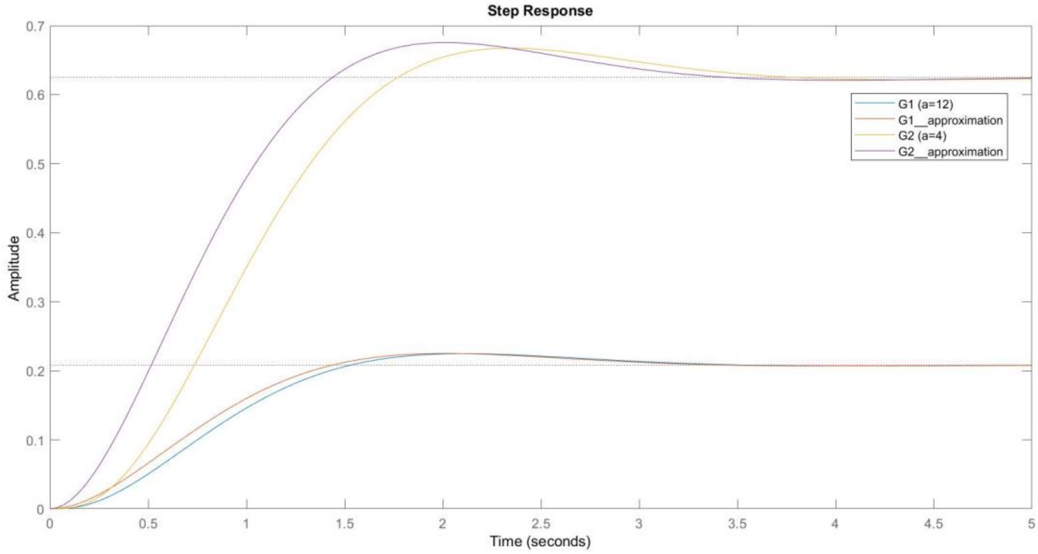


اختلاف در زمان نشست بین مقدار نظری و مقدار بدست آمده در شبیه سازی ناشی از دقت در زمان نشست است. فرمول زمانی را به ما ارائه می دهد که پاسخ در 1.83% مقدار نهایی خود قرار می گیرد. اما دقت شبیه سازی روی 2% درصد تنظیم بوده است.

درضمن مشاهده می شود که سیستم و تقریب آن رفتاری نزدیک به هم دارند.

برای a=4 داریم:

$$G'(s) = \frac{10/_{4}}{s^2+2.5s+4}$$



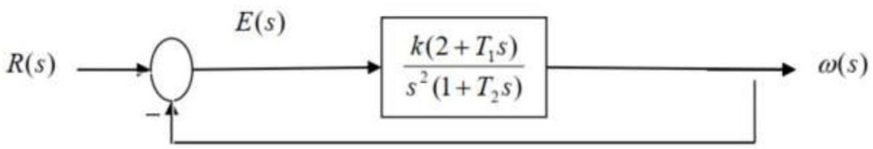
بهره سیستم برابر است با: $\frac{10}{4*a}$. در پاسخ پله می بینیم که بهره سیستم به ازای a=4 سه برابر سیستم با a=12 است.

در نمودار، تقریب مرتبه دو نیز برای سیستم (a=4) رسم شده است. چون قطب حذف شده به اندازه کافی قابل صرف نظر نبوده است (نسبت به a=12 کندتر است)، می بینیم که خطای تقریب نسبت به زمانی که a=12 بود؛ بیشتر است.

کد متلب:

```
%% Question 3.
%%%             3.a             %%%
clear; close all; clc;

a = 12;

G1 = tf([10],[1,2.5,4]) * tf([1],[1,a])
stepplot(G1)
hold on

G1__approximation = tf([10/a],[1,2.5,4])
stepplot(G1__approximation)

%%%             3.b             %%%
a = 4;

G2 = tf([10],[1,2.5,4]) * tf([1],[1,a])
stepplot(G2)
hold on

G2__approximation = tf([10/a],[1,2.5,4])
stepplot(G2__approximation)
```

۴) شرط پایداری سیستم حلقه بسته زیر را بدست آورید



حل:

$$\frac{W(s)}{R(s)}=\frac{\frac{k(2+T_1 s)}{s^2(1+T_2 s)}}{1+\frac{k(2+T_1 s)}{s^2(1+T_2 s)}}\xRightarrow{characteristic\ Eq.}\Delta(s)=\ s^2(1+T_2 s)+k(2+T_1 s)$$

$$\Delta(s)=\ T_2 s^3+s^2+\ kT_1 s+2k$$

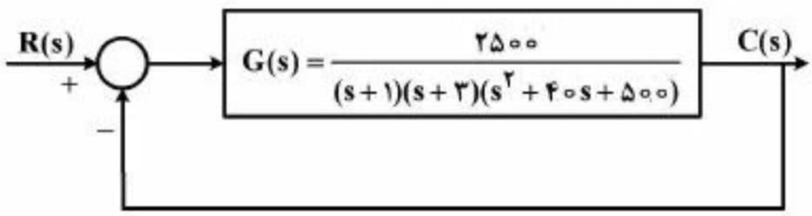
Routh-Hurwitz:

S^3	T_2	kT_1
S^2	1	2k
S^1	kT_1-$2kT_2$	0
S^0	2k	0

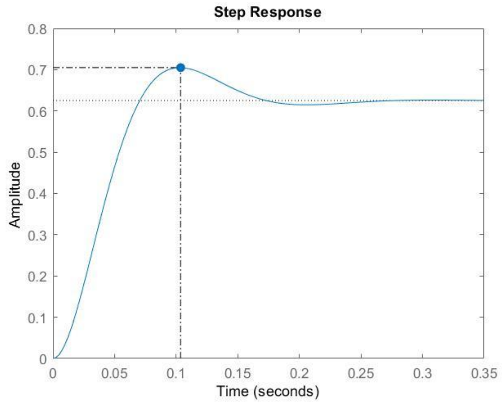
شرط پایداری: عدم تغییر علامت ستون اول. پس:

$$\begin{cases} T_2>0 \\ kT_1-2kT_2>0 \\ 2k>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} T_2>0 \\ T_1>2T_2 \\ k>0 \end{cases}$$

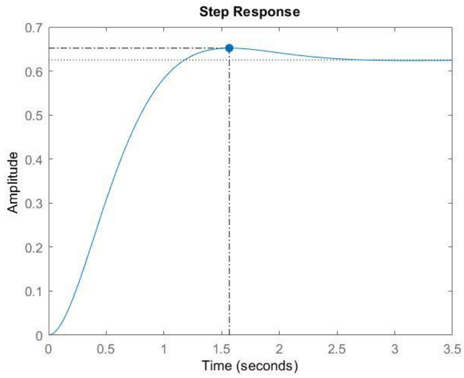
۵) برای محاسبه پاسخ پله سیستم حلقه بسته، تابع تبدیل G(s) را توسط قطب‌های غالبش با یک سیستم مرتبه ۲ تقریب می‌زنیم. در این حالت پاسخ پله واحد سیستم حلقه بسته کدام است؟



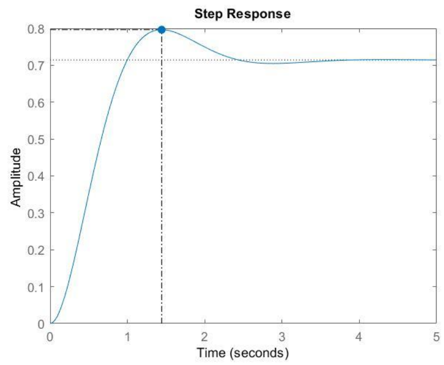
۱)



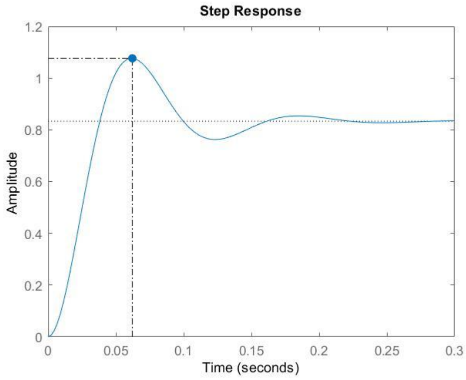
۲)



۳)



۴)



حل)

قطب‌های سیستم به صورت زیر اند:

$$Poles:\ -1, -3, -20 \pm 10i$$

قطبی که قسمت حقیقی منفی تری دارد سریع‌تر است. از آن صرف نظر کرده و با در نظر داشتن بهره سیستم، آنرا تقریب میزنیم:

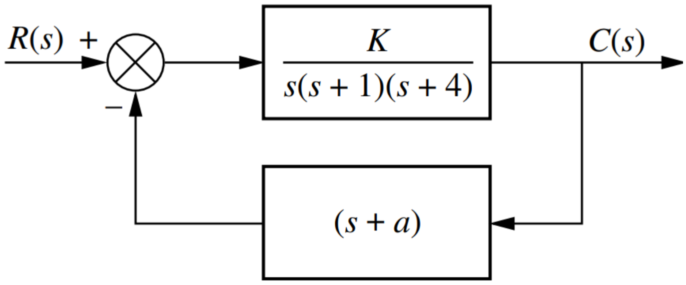
$$G_{app}(s) = \frac{2500/500}{s^2+4s+3}$$

$$G_{app\_CL}(s) = \frac{5}{s^2+4s+8} \Longrightarrow \omega_n = 2\sqrt{2}\ , \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ DC\ Gain = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{2} = 1.57$$

با توجه به بهره حالت ماندگار و زمان فراجهش، گزینه ۲ درست است.

۶) سیستم زیر را در نظر بگیرید:



خطای حساسیت خطای حالت ماندگار را به پارامتر a را محاسبه کنید. ورودی را پله فرض کنید. همچنین، حساسیت را به عنوان تابعی از پارامتر a پلات کنید.

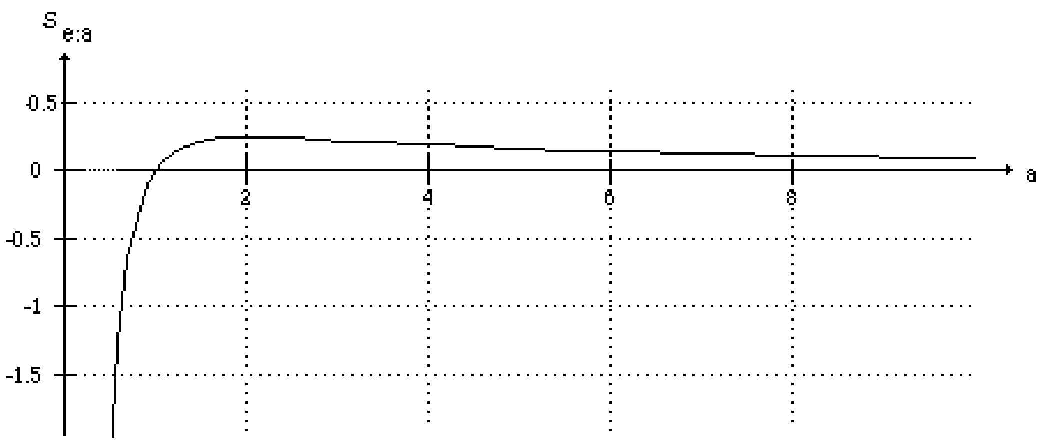
حل:

$$G_e(s)=\frac{\frac{K}{s(s+1)(s+4)}}{1+\frac{K(s+a-1)}{s(s+1)(s+4)}}=\frac{K}{s^3+5s^2+(K+4)s+K(a-1)}$$

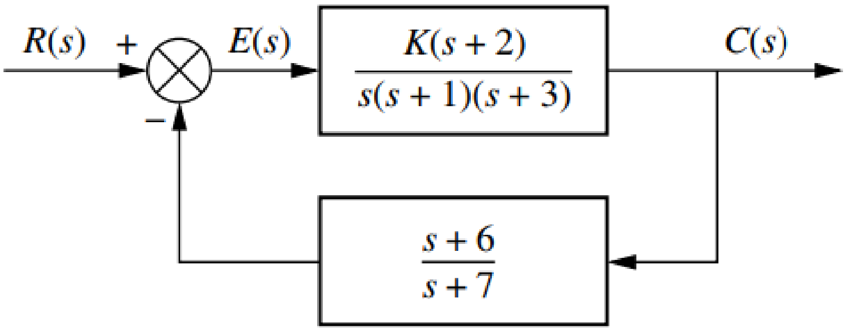
$$e(\infty)=\frac{1}{1+k_p}=\frac{1}{1+\frac{K}{K(a-1)}}=\frac{a-1}{a}$$

پس حساسیت به صورت زیر تعریف می شود:

$$S_{e:a}=\frac{a}{e}\frac{\delta e}{\delta a}=\frac{a}{\frac{a}{a-1}}\left(\frac{a-(a-1)}{a^2}\right)=\frac{a-1}{a^2}$$



۷) از معیار راث- هرویتز استفاده کنید تا بازه مورد نیاز برای K، برای پایداری سیستم را محاسبه کنید.



حل:

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+7)}{s^4 + 11s^3 + (K+31)s^2 + (8K+21)s + 12K}$$

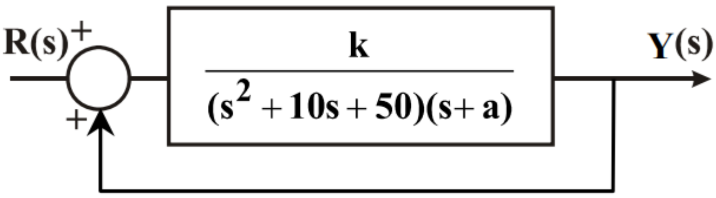
s^4	1	$K+31$	$12k$
s^3	11	$8k+21$	0
s^2	$\frac{3k+320}{11}$	$12k$	0
s^1	$\frac{24K^2 + 1171K + 6720}{3k+320}$	0	0
s^0	$12k$	0	0

$s^2 \rightarrow -106.7 < K.$

$s^1 \rightarrow K < -42.15\,,\ and - 6.64 < K$

$s^0 \rightarrow 0 < K$

۸) سیستمی در بلوک دیاگرام زیر نشان داده شده است. اگر خطای حالت ماندگار به ورودی شیب در این سیستم 0.6 باشد a و k را به دست آورید؟



حل:

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را به دست می آوریم:

$$G(s) = \frac{\frac{k}{(s^2+10s+50)(s+a)}}{\frac{(s^2+10s+50)(s+a)-k}{(s^2+10s+50)(s+a)}} = \frac{k}{s^3 + (10+a)s^2 + (50+10a)s + 50a - k}$$

برای اینکه سیستم به ورودی شیب دارای خطای حالت ماندگار محدود باشد، باید دارای قطب در مبدا باشد.
پس:

$$50a - k = 0 \rightarrow a = \frac{k}{50}$$

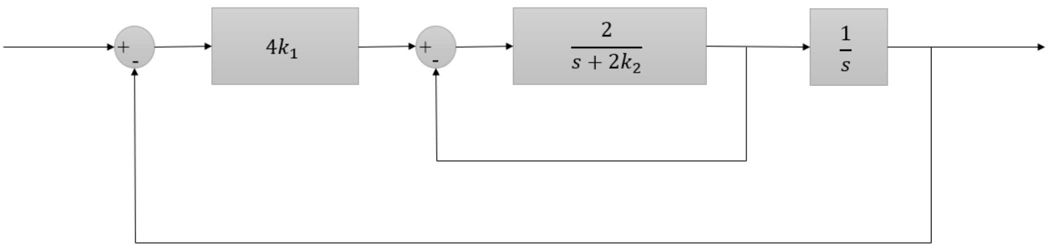
با توجه به اینکه خطای حالت ماندگار ۰.۶ است، پس:

$$K_v = \frac{5}{3}$$

پس:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{k}{50+10a} = \frac{50a}{50+10a} = \frac{5}{3} \rightarrow a = 2.5\,, k = 125$$

۹) ضرایب سیستم زیر را صوری بیابید تا حداکثر میزان فراجهش ۲۵٪ و زمان نشست با معیار ۲٪ برابر ۱ ثانیه باشد. (زمان نشست با معیار دو درصد را می‌توان با $\frac{4}{\zeta\omega_n}$ تخمین زد) پاسخ پله تقریبی آن را رسم کنید.



حل:

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را می‌نویسیم:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{8k_1}{s^2 + (2k_2+2)s + 8k_1}$$

حال با توجه به قیدهای داده شده ζ و ω_n را به دست می‌آوریم:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.25 \rightarrow \zeta = 0.4$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \rightarrow 4 = 0.4 \times \omega_n \rightarrow \omega_n = 10$$

با توجه به ζ و ω_n می‌توان ضرایب مجهول را محاسبه کرد.

$$10^2 = 8k_1 \rightarrow k_1 = 12.5$$
$$2 \times 0.4 \times 10 = 2k_2 + 2 \rightarrow k_2 = 3$$

۱۰) پایداری معادله مشخصه زیر را به دست آورید و توضیح دهید که سیستم در چه حالتی از پایداری قرار دارد.

$$\Delta(s) = s^6 + 3s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 12s^2 + 12s + 8$$

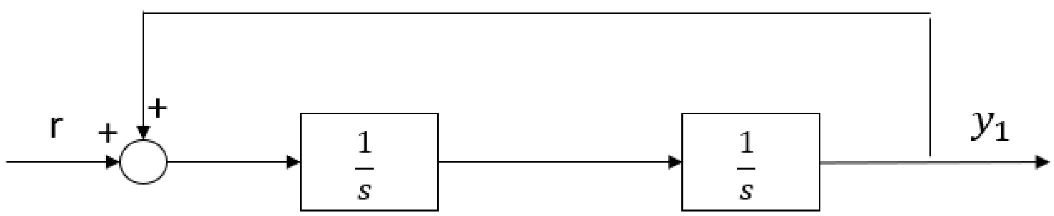
حل:

$$\begin{array}{lllll}
s^6 & 1 & 6 & 12 & 8 \\
s^5 & \cancel{3}\ 1 & \cancel{12}\ 4 & \cancel{12}\ 4 & \\
s^4 & \cancel{2}\ 1 & \cancel{8}\ 4 & \cancel{8}\ 4 & \Rightarrow P_1(s) = s^4 + 4s^2 + 4 \rightarrow P_1'(s) = 4s^3 + 8s \\
s^3 & \cancel{0}\ 1 & \cancel{0}\ 2 & & \\
s^2 & 2 & 4 \ \Rightarrow P_2(s) = 2s^2 + 4 \rightarrow P_2'(s) = 4s & & \\
s^1 & \cancel{0}\ 4 & & & \\
s^0 & 4 & & &
\end{array}$$

در ستون اول جدول راث هرویتز هیچ تغییر علامتی دیده نمی‌شود اما معادله مشخصه داده شده ناپایدار است چون هم سطر s^3 و هم s^1 صفر شده است.

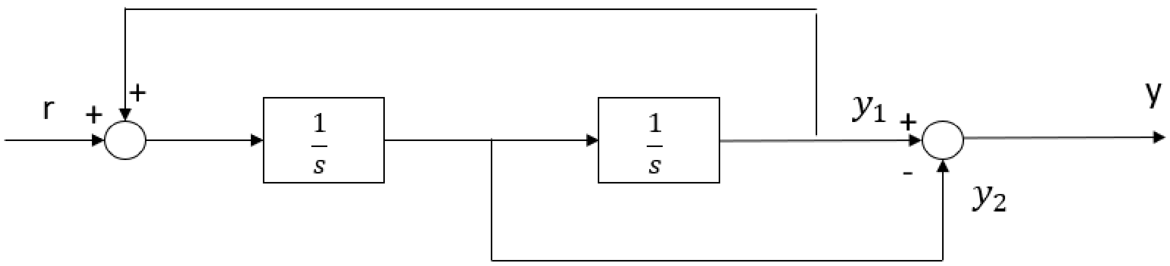
۱۱) بلوک دیاگرام یک سیستم کنترلی در شکل زیر نمایش داده شده است. در مرحله اول سنسورها را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که سیگنال y_1 را اندازه گیری کند.

الف) پایداری BIBO سیستم را بررسی کنید.



در مرحله دوم، سنسورها را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که سیگنال $y = y_1 - y_2$ به عنوان خروجی سیستم اندازه‌گیری شود. بلوک دیاگرام مربوط به این مرحله در شکل زیر نمایش داده شده است.

ب) پایداری BIBO سیستم را به ازای ورودی r و خروجی y محاسبه کنید.



ج) با توجه به اینکه ساختار سیستم تغییر نکرده، ورودی در هر دو حالت یکسان بوده و تنها جایگیری سنسورها دچار تغییر شده، نتایج بدست آمده را چطور تعبیر می‌کنید؟

حل:

الف)

$$\frac{y_1}{r} = \frac{\frac{1}{s^2}}{1-\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s^2-1}$$

با توجه به اینکه سیستم قطب ناپایدار دارد، از دیدگاه BIBO ناپایدار است.

ب)

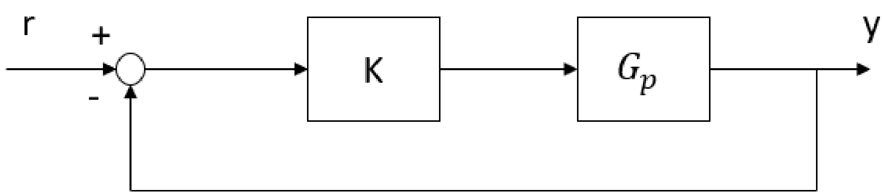
$$y_2 = \frac{r}{s} + \frac{y_1}{s} = \frac{r}{s} + \frac{r}{s(s^2-1)} = \frac{r}{s}\left(1+\frac{1}{s^2-1}\right) = \frac{rs}{s^2-1} \rightarrow \frac{y_2}{r} = \frac{s}{s^2-1}$$

$$y = y_1 - y_2 \rightarrow \frac{y}{r} = \frac{1}{s^2-1} - \frac{s}{s^2-1} = \frac{1-s}{(s-1)(s+1)} = -\frac{1}{s+1}$$

ج)

با توجه به نتایج بدست آمده از بخش‌های قبل، ناپایداری در سیستم وجود دارد اما اگر سیگنال $y_1 - y_2$ را اندازه‌گیری کنیم، قادر به مشاهده این ناپایداری نیستیم. بنابراین باید توجه کنیم که در سیستم کنترلی سنسورها را به گونه‌ای انتخاب کنیم که اطلاعات کامل و درست از سیستم در اختیار ما قرار بگیرد.

۱۲) بلوک دیاگرام یک سیستم کنترلی در شکل زیر رسم شده است.



$$G_p = \frac{(s+2)}{(s^2+1.414s+1)(s+5)}$$

بهره K را به گونه‌ای بیابید که حداقل فاصله قطب‌های سیستم حلقه بسته از محور موهومی برابر ۲ باشد.

حل:

ابتدا معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را بدست می‌آوریم:

$$\Delta = s^3 + 6.414s^2 + (8.07+k)s + (5+k)$$

تغییر متغیر $s' = s + 2$ را اعمال می‌کنیم:

$$\Delta' = (s'-2)^3 + 6.414(s'-2)^2 + (8.07+k)(s-2) + (5+2k)$$

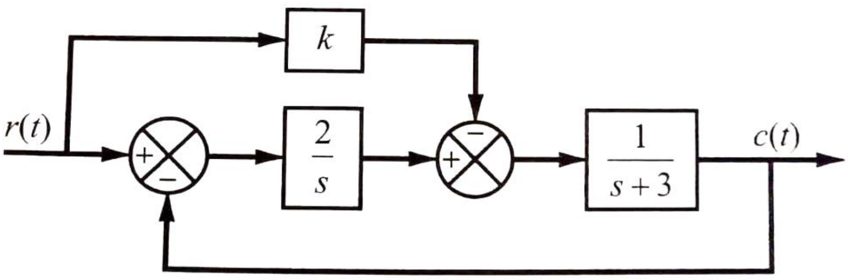
$$\Delta' = s'^3 + 0.414s'^2 + (k-5.586)s' + (6.516)$$

سپس پایداری معادله جدید را با استفاده از روش Ruth-Hurwitz بررسی می‌کنیم. اگر بهره‌ای یافت شود که بتواند این معادله را پایدار کند، به معنی آن است که می‌توان بهره‌ای یافت که قطب‌های سیستم فاصله حداقل ۲ را تا محور موهومی داشته باشند.

s^3	1	$(k-5.586)$
s^2	0.414	6.516
s^1	$k-21.32$	0
s^0	6.516	0

$k - 21.32 > 0 \rightarrow \boldsymbol{k > 21.32}$

۱۳) در سیستم شکل زیر به ازای چه مقدار از k سیگنال خطای $e(t)$ به ورودی پله واحد به صورت $e(t) = (4e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$ خواهد بود؟



حل:

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را به دست آورده و از روی آن سیگنال خطا را مشخص می‌کنیم.

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+3)} - \frac{k}{(s+3)}}{1 + \frac{2}{s(s+3)}} = \frac{-ks+2}{s^2+3s+2}$$

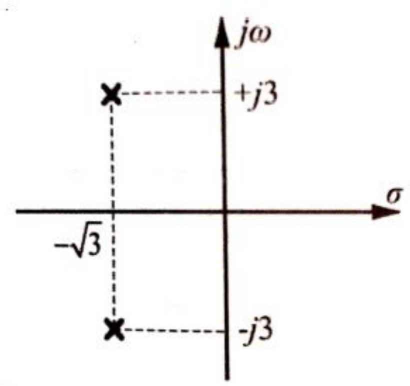
$$E(s) = R(s) - C(s) = [1 - T(s)]R(s) = \left(1 - \frac{-ks+2}{s^2+3s+2}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{s+(3+k)}{s^2+3s+2}$$

با عکس لاپلاس گرفتن از سیگنال $E(s)$ مقدار زمانی خطا $e(t)$ به دست می‌آید.

$$E(s) = \frac{2+k}{s+1} - \frac{1+k}{s+2} \Rightarrow e(t) = (2+k)e^{-t} - (1+k)e^{-2t}$$

از مقایسه $e(t)$ به دست آمده $e(t)$ با داده شده جواب یکتایی برای K به دست نمی‌آید. در نتیجه به ازای هیچ مقداری از K سیگنال خطا نمی‌تواند به صورت داده شده باشد.

۱۴) محل قطب‌های حلقه بسته یک سیستم مرتبه دوم در شکل زیر نشان داده شده‌اند. زمان فراجهش و زمان استقرار سیستم به ترتیب کدام است؟



حل:

با توجه به محل قطب‌های حلقه بسته، $\xi\omega_n = \sqrt{3}$ و $\omega_d = 3$ می‌باشد و برابر خواهد بود با:

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

حال زمان نشست و زمان اوج به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.3 \text{ و } t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{3}$$

۱۵) تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی با پسخور واحد به صورت زیر است:

$$M(s) = \frac{4(s+1)}{s^3 + 2s^2 + 4s + 4}$$

خطای حالت دائمی (ماندگار) این سیستم به ورودی $u(t)$ $r(t) = \left(3 - t + \frac{t^2}{4}\right)u(t)$ برابر چند است؟

حل)

$$E(s) = \big(1 - M(s)\big)R(s) = \frac{s^3 + 2s^2}{s^3 + 2s^2 + 4s + 4} \times \left(\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s^3}\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \times \frac{s^2(s+2)}{s^3 + 2s^2 + 4s + 4} \times \left(\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s^3}\right) = \frac{1}{4}$$

موفق باشید.