دانشکده مهندسی برق
گروه کنترل و سیستم
نیم‌سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

سیستم‌های کنترل خطی

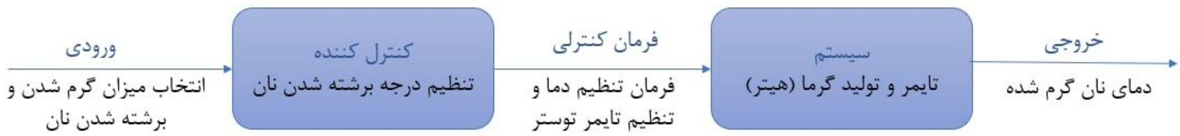
حل تمرین اول

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ۱۳۰۷

استاد: حمید رضا تقی راد

۱)

سیستم ۱ به صورت حلقه باز کنترل می‌شود. طبق بلوک دیاگرامی که در زیر کشیده شده است، فردی که قصد دارد نان را گرم کند، نان را در داخل توستر قرار می‌دهد و میزان برشته شدن مطلوب را تنظیم می‌کند. این امر بدان معناست که خود توستر قابلیت تنظیم خودکار دما را ندارد و فردی از خارج از سیستم باید آن را تنظیم کند. سپس، تایمر توستر به کار می‌افتد. با توجه به تنظیمات دستگاه و درجه برشته شدن که فرد مورد نظر مشخص کرده، پس گذشت زمانی مشخص نان گرم و برشته شده حاضر شده و از دستگاه خارج می‌شود.



در سیستم ۲ کنترل به صورت حلقه بسته است. همانطور که در دیاگرام پایین دیده می‌شود، قایقران در این مثال نقش کنترل‌کننده را دارد. در ابتدا سرعت ثابت مجاز به عنوان ورودی به کنترل کننده داده می‌شود، سپس قایقران با توجه به تجربه و سرعت سنج خود، اگر که سرعت از حد مجاز کمتر شد سرعت را بیشتر کرده و اگر از آن کمتر شد سرعت قایق را کمتر می‌کند تا قایق بتواند با سرعت ثابت حرکت کند. فرمان کنترلی به موتور قایق داده شده و باعث سرعت گرفتن یا کاهش سرعت آن می‌شود.

۲)

اثبات می شود برای یک تابع متناوب با دوره تناوب T برای $t > 0$ تبدیل لاپلاس به صورت زیر بدست می آید:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\mathcal{L}[f_T(t)]}{1 - e^{-Ts}}$$

که در آن $\mathrm{f}_T(t)$ تابع مربوط به اولین تناوب است.

$$\mathrm{f}_T(t)=\begin{cases} f(t), & 0\le t\le T \\ 0, & t>T \end{cases}$$

در این مثال، منحنی داده‌شده متناوب با دوره تناوب b است. برای تناوب اول تابع $\mathrm{f}_b(t)$ به صورت زیر است.

$$\mathrm{f}_b(t)=\frac{a}{b}t[h(t)-h(t-b)]$$

بنابراین داریم:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\,[\mathrm{f}_b(t)]=\boldsymbol{\mathcal{L}}\,\left[\frac{a}{b}t[h(t)-h(t-b)]\right]=-\frac{a}{b}\frac{d}{ds}\,\boldsymbol{\mathcal{L}}\,[h(t)-h(t-b)]$$

از طرفی نیز داریم:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[h(t)-h(t-b)]=\boldsymbol{\mathcal{L}}[\mathrm{h(t)}]-\boldsymbol{\mathcal{L}}[\mathrm{h(t-b)}]=\frac{1}{s}-\frac{e^{-bs}}{s}\quad ,s>0$$

بنابراین:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\mathrm{f}_b(t)]=\frac{a}{b}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{bse^{-bs}+e^{-bs}}{s^2}\right)$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[f(t)]=\frac{\boldsymbol{\mathcal{L}}[\mathrm{f}_b(t)]}{1-e^{-bs}}=\frac{a}{b}\left(\frac{1-e^{-bs}-bse^{-bs}}{s^2(1-e^{-bs})}\right)$$

۳)

۱)

$$F(s)=\frac{s^3+2s-4}{s^4-16}=\frac{As+B}{s^2-4}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$F(s)=\frac{\frac{3}{4}s+\frac{1}{2}}{s^2-4}+\frac{\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}}{s^2+4}$$

$$f(t)=\frac{1}{4}\sinh(2t)+\frac{3}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sinh(2t)\right)-\frac{1}{4}\sin(2t)-\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)$$

$$f(t)=\frac{1}{4}\sinh(2t)+\frac{3}{4}\cosh(2t)-\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{4}\cos(2t)$$

۲)

$$G(s)=\frac{2(s+2)(s+5)^2}{(s+1)(s^2+4)^2}$$

$$G(s)=\frac{C_1}{s+1}+\frac{C_2}{s-2j}+\frac{C_3}{s+2j}+\frac{C_4}{(s-2j)^2}+\frac{C_5}{(s+2j)^2}$$

$$C_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = 1.28$$
$$C_4 = (s-2j)^2F(s)|_{s=2j} = -4.15 - j1.95$$
$$C_5 = C_4^* = -4.15 + j1.95$$
$$C_2 = \frac{d}{ds}\left((s-2j)^2F(s)\right)|_{s=2j} = -0.64 - j2.895$$
$$C_3 = C_2^* = -0.64 + j2.895$$

$$f(t) = 1.28e^{-t} + 2|C_2|\cos(2t + \arg(C_2)) + 2|C_4|tcos(2t + \arg(C_4))$$

$$|C_2| = 2.96489, |C_4| = 4.585$$
$$\arg(C_2) = \tan^{-1}\left(\frac{-2.895}{-0.64}\right) = -1.788$$
$$\arg(C_4) = \tan^{-1}\left(\frac{-1.95}{-4.15}\right) = -2.702$$

۴)

برای اطلاعات بیشتر: نحوه محاسبه معادله دیفرانسیل حاکم به سیستم شکل ۲

از قضیه لاگرانژ داریم:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\right)^2 + mgLcos(\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_L}{\partial_{\dot{\theta}}}\right) - \frac{\partial_L}{\partial_\theta} = -b\dot{\theta}$$

$$\rightarrow mL^2\ddot{\theta} + mgLsin(\theta) = -bL\dot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{b}{mL}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{mL}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = u(t)$$

۱. شکل ۱:

$$\left(s^2 + \frac{b}{mL}s - \frac{g}{L}\right)\theta = U(s)$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{mL}s - \frac{g}{L}}$$

۱. شکل ۲:

$$\left(s^2 + \frac{b}{mL}s + \frac{g}{L}\right)\theta = U(s)$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{mL}s + \frac{g}{L}}$$

۲. شکل ۱:

چون تابع تبدیل بدست آمده روی محور $j\omega$ تحلیلی نیست، از قضیه مقدار نهایی نمی‌توان استفاده کرد. پاسخ سیستم به بینهایت میل کرده و حالت ماندگار ندارد.

۲. شکل ۲:

ورودی پله:

$$\theta(s)=\frac{1}{s^2+\frac{b}{L}s+\frac{g}{L}}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{s^3+\frac{b}{mL}s^2+\frac{g}{L}s}$$

مقدار نهایی: $\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\lim_{s\to 0}s\theta(s)=\frac{1}{s^2+\frac{b}{mL}s+\frac{g}{L}}|_{s=0}=\frac{L}{g}$

ورودی ضربه:

$$\theta(s)=\frac{1}{s^2+\frac{b}{mL}s+\frac{g}{L}}\times 1=\frac{1}{s^2+\frac{b}{mL}s+\frac{g}{L}}$$

مقدار نهایی: $\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\lim_{s\to 0}s\theta(s)=\frac{s}{s^2+\frac{b}{mL}s+\frac{g}{L}}|_{s=0}=0$

۳. شکل ۱:

ورودی ضربه:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2+\frac{b}{mL}s-\frac{g}{L}}\to\theta(s)=\frac{1}{s^2+\frac{b}{mL}s-\frac{g}{L}}=\frac{1}{s^2+\frac{b}{L}s+\frac{b^2}{4m^2L^2}-\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}}=$$

$$\frac{1}{\left(s+\frac{b}{2mL}\right)^2-\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}=\frac{1}{s+\frac{b}{2mL}-\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}}.\frac{1}{s+\frac{b}{2mL}+\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}}=\frac{1}{s+\alpha}.\frac{1}{s+\beta}$$

$$\to\theta(t)=\mathcal{L}^{-1}\big(\theta(s)\big)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}\right)$$

$$\theta(t)=\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}}\left(e^{-\left(\frac{b}{2mL}+\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\right)t}-e^{-\left(\frac{b}{2mL}-\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\right)t}\right)$$

ورودی پله:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{s}.\frac{1}{s^2+\frac{b}{mL}s-\frac{g}{L}}\rightarrow\theta(s)=\frac{1}{s}.\frac{1}{s^2+\frac{b}{mL}s-\frac{g}{L}}$$

$$=\frac{1}{s}.\frac{1}{s^2+\frac{b}{mL}s+\frac{b^2}{4m^2L^2}-\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}}=\frac{1}{s}.\frac{1}{\left(s+\frac{b}{2mL}\right)^2-\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{s}.\frac{1}{s+\frac{b}{2mL}-\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}}.\frac{1}{s+\frac{b}{2mL}+\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}}$$

$$=\frac{1}{s}.\frac{1}{s+\alpha}.\frac{1}{s+\beta}=\frac{1}{\alpha\beta s}-\frac{1}{(\beta-\alpha)\alpha(s+\alpha)}-\frac{1}{(\alpha-\beta)\beta(s+\beta)}$$

$$\theta(t)=\mathcal{L}^{-1}\big(\theta(s)\big)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{(\beta-\alpha)\alpha}.e^{-(\alpha t)}-\frac{1}{(\alpha-\beta)\beta}.e^{-(\beta t)}$$

$$\theta(t)=-\frac{L}{g}-\frac{2}{\left(\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\right)\left(\frac{b}{2mL}-\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\right)}e^{-\left(\frac{b}{2mL}-\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\right)t}$$

$$+\frac{2}{\left(\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\right)\left(\frac{b}{2mL}-\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\right)}e^{-\left(\frac{b}{2mL}+\sqrt{\left(\frac{g}{L}+\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\right)t}$$

۳. شکل ۲:

پاسخ ضربه:

$$\theta(s)=\frac{1}{s^2+\frac{b}{mL}s+\frac{g}{L}}$$

$$\theta(s)=\frac{1}{\left(s+\frac{b}{2mL}\right)^2+\left(\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}}e^{-\frac{b}{2mL}t}\sin\left(\sqrt{\left(\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\ t\right)$$

پاسخ پله:

$$\theta(s)=\frac{1}{s\left(s^2+\frac{b}{mL}s+\frac{g}{L}\right)}$$

$$s^2+\frac{b}{mL}s+\frac{g}{L}=\left(s+\frac{\frac{b}{mL}-j\sqrt{-\frac{b^2}{m^2L^2}+4\frac{g}{L}}}{2}\right)\left(s+\frac{\frac{b}{mL}+j\sqrt{-\frac{b^2}{m^2L^2}+4\frac{g}{L}}}{2}\right)$$

$$s^2+\frac{b}{mL}s+\frac{g}{L}=(s+\alpha)(s+\beta)$$

$$\alpha=\frac{b}{2mL}-j\sqrt{-\frac{b^2}{4m^2L^2}+\frac{g}{L}}$$

$$\beta=\frac{b}{2mL}+j\sqrt{-\frac{b^2}{4m^2L^2}+\frac{g}{L}}$$

$$\theta(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\alpha}+\frac{C}{s+\beta}$$

$$1=A\left(s^2+\frac{b}{mL}s+\frac{g}{L}\right)+Bs(s+\beta)+Cs(s+\alpha)$$

$$A=\frac{L}{g}$$

$$B=\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)}$$

$$C=\frac{1}{\beta(\beta-\alpha)}$$

$$\theta(s)=\frac{L}{g}\frac{1}{s}-\frac{\frac{L}{g}s+\frac{b}{gm}}{\left(s+\frac{b}{2mL}\right)^2+\left(\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}$$

$$=\frac{L}{g}\frac{1}{s}-\frac{\frac{L}{g}(s+\frac{b}{2mL})}{\left(s+\frac{b}{2mL}\right)^2+\left(\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}-\frac{\frac{b}{gm}-\frac{b}{2gm}}{\left(s+\frac{b}{2mL}\right)^2+\left(\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}$$

$$\theta(t)=\frac{L}{g}-\frac{L}{g}e^{-\frac{b}{2mL}t}\cos\left(\sqrt{\left(\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\ t\right)$$
$$-\frac{\frac{b}{2mg}}{\sqrt{\left(\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}}e^{-\frac{b}{2mL}t}\sin\left(\sqrt{\left(\frac{g}{L}-\frac{b^2}{4m^2L^2}\right)}\ t\right)$$

۴. شکل ۱:

اگر حد پاسخ سیستم را در به ازای هر دو ورودی در $t \to \infty$ محاسبه کنیم مشاهده می‌شود که مقدار زاویه همواره در حال افزایش خواهد بود که با توجه به شهود و فیزیک مسئله می‌دانیم اگر آونگ وارون را چه با ضربه چه با نیروی ثابت از حالت تعادل خود خارج کنیم، آونگ از نقطه تعادل خود دور شده و به آن باز نمیگردد.

البته باید توجه داشت که معادلات ریاضی نشان می‌دهند که زاویه تتا باید همواره در حال افزایش باشد اما میدانیم در واقعیت این اتفاق نیفتاده و هنگامی که آونگ وارون به حالت طبیعی خود برسد ($theta = pi$)، پس از اندکی نوسان در $theta = pi$ متوقف می شود. علت آنکه معادلات این بخش را نشان نمیدهند این است که سیستم آونگ یک سیستم غیر خطی بوده و معادلات خطی سازی شده در این سوال استفاده شده‌اند. هنگامی که آونگ وارون بیش از اندازه از محل اولیه خود دور می‌شود، معادلات خطی از اعتبار ساقط می‌شوند.

۴. شکل ۲:

اگر حد پاسخ سیستم را در به ازای هر دو ورودی در $t \to \infty$ محاسبه کنیم مشاهده می‌شود که در نهایت ترم‌های سینوسی و کسینوسی صفر می‌شوند. در پاسخ به ضربه، سیستم نوسان می‌کند ولی به دلیل وجود دمپینگ در سیستم، کم کم به زاویه صفر میل می‌کند و در نقطه تعادل می‌ایستد. اگر که به سیستم ورودی پله وارد کنیم، همانند ورودی ضربه به مرور زمان ترم های سینوسی و کسینوسی صفر خواهند شد و در نهایت مقدار حالت ماندگار باقی خواهد ماند.

۵)

کد متلب:

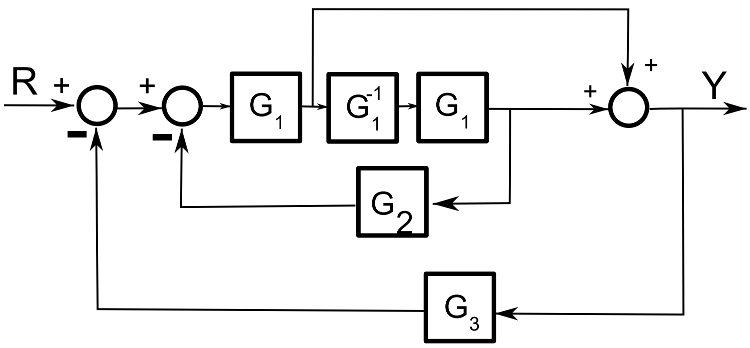
```
% start of program
clear; close all; clc;

% defining transfer functions:
s = tf("s");
G1 = 1 / (s + 7);
G2 = tf(1, [1, 0, 1]);
G3 = 1 / s;
G4 = 10 + 5/s;
G5 = 10 + 5*s;
G6 = zpk([-1], [-15, -5], 1);

% deriving the overall transfer function with respect to the block
diagram:
H1 = feedback(G1*G2, G3, -1);
H2 = parallel(H1, G6);  % or simply: H2 = H1 + G6
H3 = series(H2, G3);    % or simply: H3 = H2 * G3

G = feedback(H3, G5, -1) % it's in zpk form
G_tf = tf(G)
```

خروجی:

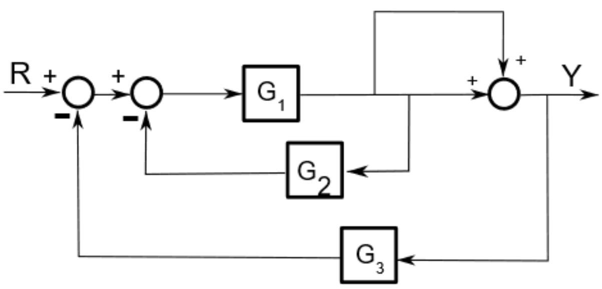
```
Command Window

G =

             (s+7.05) (s+2.244) (s+0.0121) (s^2 - 1.306s + 5.225)
  ---------------------------------------------------------------------------
  (s+20.67) (s+7.028) (s+4.242) (s+0.7567) (s+0.01116) (s^2 - 0.7107s + 1.922)

Continuous-time zero/pole/gain model.


G_tf =

             s^5 + 8 s^4 + 9 s^3 + 28 s^2 + 83 s + 1
  ------------------------------------------------------------------
  s^7 + 32 s^6 + 266 s^5 + 677 s^4 + 446 s^3 + 1240 s^2 + 910 s + 10

Continuous-time transfer function.
```

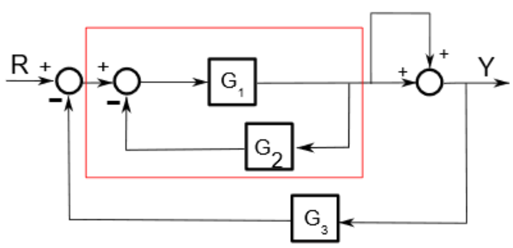
۶)

۱) مرحله ۱: بلوک G_1 بالایی را به جلوی جمع کننده می‌بریم:

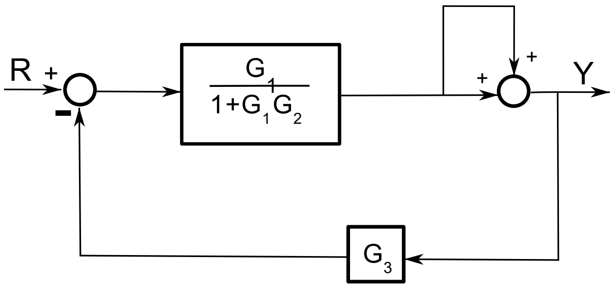


مرحله ۲: مسیر را ساده سازی کرده و حلقه کنترلی موجود را تشخیص می‌دهیم:

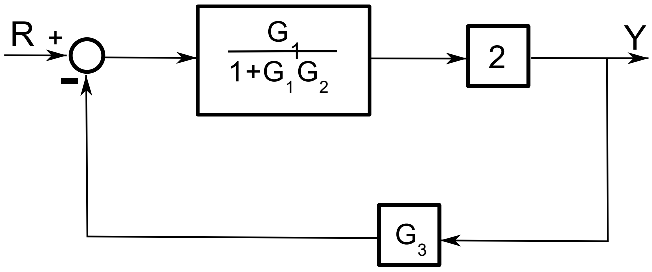




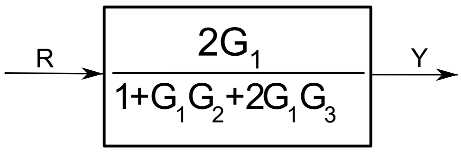
مرحله ۳: ساده سازی حلقه درونی:



مرحله ۴:



مرحله آخر: حلقه نهایی را ساده می‌کنیم تا سیستم به فرم یک سیستم حلقه باز نوشته شود:



۲) با جا گذاری روابط در سیستم قسمت ۱ و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$H=\frac{Y}{R}=\frac{2\,\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}\frac{1}{s+1}\;+2\frac{1}{s}(10+\frac{1}{s})}=\frac{2s^4+2s^3}{s^5+21\,s^4+23\,s^3+2s^2}$$

۷)

دو مسیر بین R و Y وجود دارد که بهره های آن به صورت زیر است:

$$P_1=G_1G_2G_3G_4G_5$$

$$P_2=G_6G_7G_8G_9G_{10}$$

بهره حلقه ها به صورت زیر است:

$$L_1=-G_2H_1$$

$$L_2 = -G_3H_2$$
$$L_3 = -G_4H_3$$
$$L_4 = -G_7H_4$$
$$L_5 = -G_8H_5$$
$$L_6 = -G_9H_6$$

بهره جفت حلقه های بدون تماس به صورت زیر است:

$$L_1L_3 = G_2H_1G_4H_3$$
$$L_1L_4 = G_2H_1G_7H_4$$
$$L_1L_5 = G_2H_1G_8H_5$$
$$L_1L_6 = G_2H_1G_9H_6$$
$$L_2L_4 = G_3H_2G_7H_4$$
$$L_2L_5 = G_3H_2G_8H_5$$
$$L_2L_6 = G_3H_2G_9H_6$$
$$L_3L_4 = G_4H_3G_7H_4$$
$$L_3L_5 = G_4H_3G_8H_5$$
$$L_3L_6 = G_4H_3G_9H_6$$
$$L_4L_6 = G_7H_4G_9H_6$$

بهره سه حلقه بدون تماس نیز به صورت زیر است:

$$L_1L_3L_4 = -G_2H_1G_4H_3G_7H_4$$
$$L_1L_3L_5 = -G_2H_1G_4H_3G_8H_5$$
$$L_1L_3L_6 = -G_2H_1G_4H_3G_9H_6$$
$$L_1L_4L_6 = -G_2H_1G_7H_4G_9H_6$$
$$L_2L_4L_6 = -G_3H_2G_7H_4G_9H_6$$
$$L_3L_4L_6 = -G_4H_3G_7H_4G_9H_6$$

بهره چهار حلقه بدون تماس نیز به صورت زیر است:

$$L_1L_3L_4L_6 = G_2H_1G_4H_3G_7H_4G_9H_6$$

در ادامه دترمینان کلی گراف را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned}\Delta = 1 &- \{L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6\} \\ &+ \{L_1L_3 + L_1L_4 + L_1L_5 + L_1L_6 + L_2L_4 + L_2L_5 + L_2L_6 + L_3L_4 + L_3L_4 \\ &+ L_3L_4 + L_4L_6\} \\ &- \{L_1L_3L_4 + L_1L_3L_4 + L_1L_3L_6 + L_1L_4L_6 + L_2L_4L_6 + L_3L_4L_6\} + L_1L_3L_4L_6\end{aligned}$$

همچنین دترمینان مسیر ها به صورت زیر است:

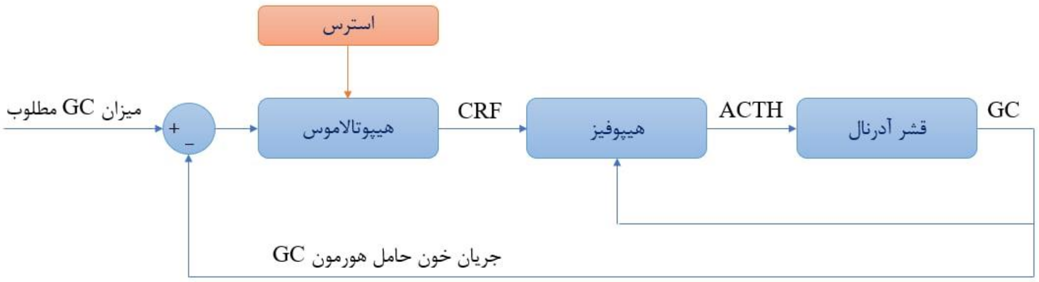
$$\Delta_1 = 1 - \{L_4 + L_5 + L_6\} + \{L_4 L_6\}$$

$$\Delta_2 = 1 - \{L_1 + L_2 + L_3\} + \{L_1 L_3\}$$

حال با استفاده از فرمول بهره میسون داریم:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

سوال امتیازی) با توجه به متن سوال بلوک دیاگرام ساده شده را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:



موفق باشید.