بنام آنکه جان را فکرت آموخت

سیستم‌های کنترل خطی

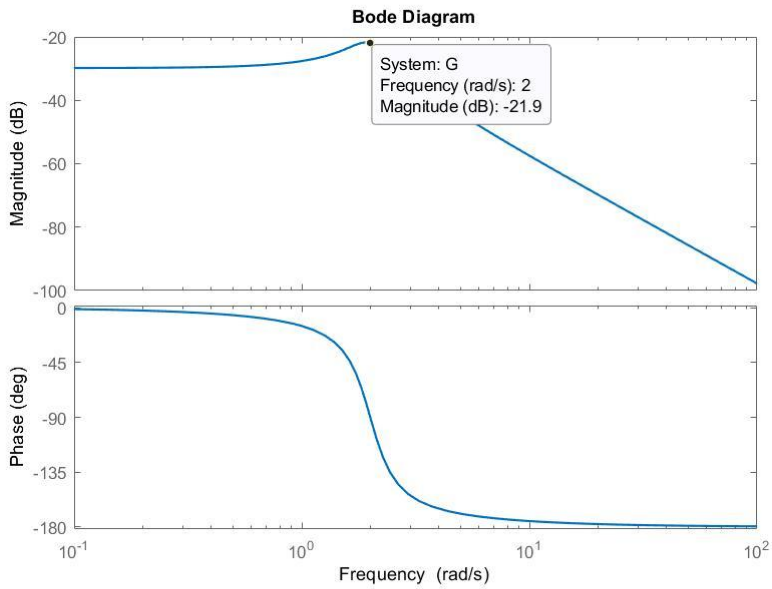
تمرین حل‌شده چهارم

۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
استاد: حمید رضا تقی راد

۱) یک سیستم ساده جرم-فنر-دمپر که رابطه فیزیکی و تابع تبدیل آن داده شده است را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار بودی آن پارامترهای سیستم (m, b, k) را به دست آورید (نسبت میرایی را ۰.۲در نظر بگیرید).

$$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$



پاسخ:

با توجه به نمودار بودی، بهره فرکانس پایین سیستم ۳۰- و فرکانس گوشه 2rad/s است. داریم:

$$\frac{1}{\tau} = 2\frac{rad}{s} \Rightarrow \tau = 0.5$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \Rightarrow |G(0)| = \frac{1}{k} \Rightarrow -30 = 20\log\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow k = 10^{\frac{30}{20}} \approx 32\ N/m$$

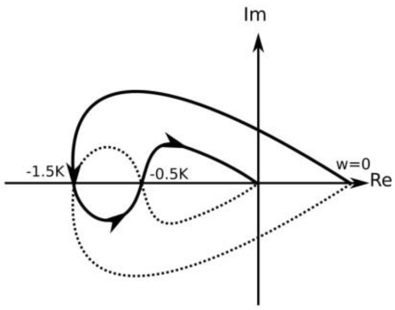
از طرفی میدانیم که تابع تبدیل مرتبه دو را به فرم زیر میتوان نوشت:

$$G(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau\, s + 1} = \frac{1/k}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{k} = \frac{1}{4} \Rightarrow m = 7.75\ kg \\ \frac{b}{k} = 2\zeta\tau = 0.2 \Rightarrow b = 6.4\ Ns/m \end{cases}$$

$m = 7.75, \qquad b = 6.4, \qquad k = 32$

۲) تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار نایکوئیست داده شده، مقادیری از K را بیابید که سیستم حلقه بسته یک قطب ناپایدار داشته باشد.

$$G(s) = \frac{500K(s+1)}{(s-10)^2}$$



پاسخ:

تعداد قطب‌های ناپایدار حلقه باز سیستم برابر ۲ است. برای اینکه سیستم حلقه بسته ۱ قطب ناپایدار داشته باشد باید منحنی نایکویست یک دور خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول ۱- بچرخد.

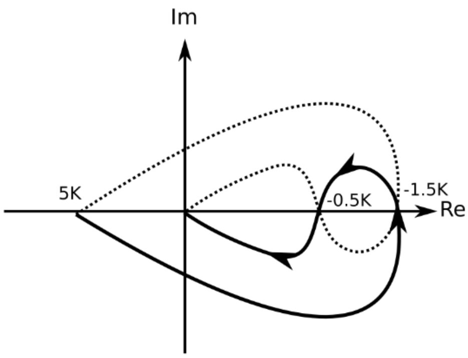
:$K > 0$

در این حالت تعداد چرخش خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول ۱- برابر ۰ یا ۲ است ($N = 0$ یا $N = -2$). و خواسته مسئله برآورده نمی‌شود.

:$K < 0$

منحنی ۱۸۰ درجه میچرخد. با توجه به نمودار و اطلاعات داده شده، محل برخورد با محور حقیقی به ازای $\omega = 0$ را بر حسب K به دست می‌آوریم:

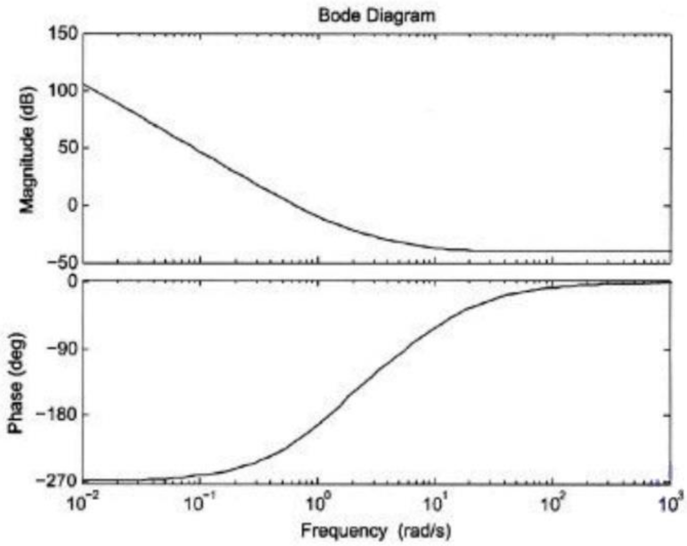
$G(s=0) = \frac{500K(0+1)}{(0-10)^2} = 5K$



در صورتی که $5K$ سمت چپ ۱- قرار گیرد، منحنی یک بار خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول ۱- میچرخد ($N = -1$). در این صورت سیستم حلقه بسته یک قطب ناپایدار داشته باشد:

$$5K < -1 \Rightarrow K < -0.2$$

۳) دیاگرام بودی تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم مینیمم فاز در شکل زیر داده شده است. کدام گزینه برای سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد، صحیح است؟



۱) سیستم پایدار مشروط است.

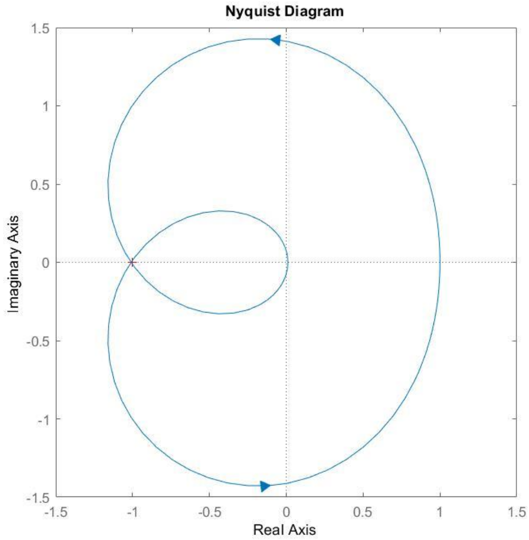
۲) برای k مثبت، سیستم ناپایدار است.

۳) برای k مثبت، سیستم مطلقاً پایدار است.

۴) برای k منفی، سیستم پایدار است.

پاسخ: گزینه ۱ درست است.

سیستم حلقه باز کمینه فاز است پس در سمت راست محور موهومی قطب ندارد ($P = 0$). با استفاده از نمودار بودی داده شده، دیاگرام نایکوئیست را رسم می‌کنیم:



در نمودار فوق میبینیم که با توجه به مقدار بهره سیستم، نمودار نایکوئیست میتواند ۰ یا ۱- دور حول ۱- بچرخد. لذا سیستم حلق بسته می تواند پایدار و یا ناپایدار باشد.

۴) نمودار بودی سیستم زیر را رسم نمایید. مراحل به ترتیب به صورت دستی ذکر شود. با استفاده از نرم افزار متلب پاسخ را راستی آزمایی نمایید.

$$G(s) = \frac{0.6(s+1)^2}{s(s+0.1)(s^2+s+2)}$$

پاسخ: بهره‌ی DC سیستم به صورت زیر است:

$$DC\ gain = \frac{0.6}{2 \times 0.1} = 3$$

سیستم نیز نوع یک می باشد.

$G_1(s) = 0.6(s+1)^2$

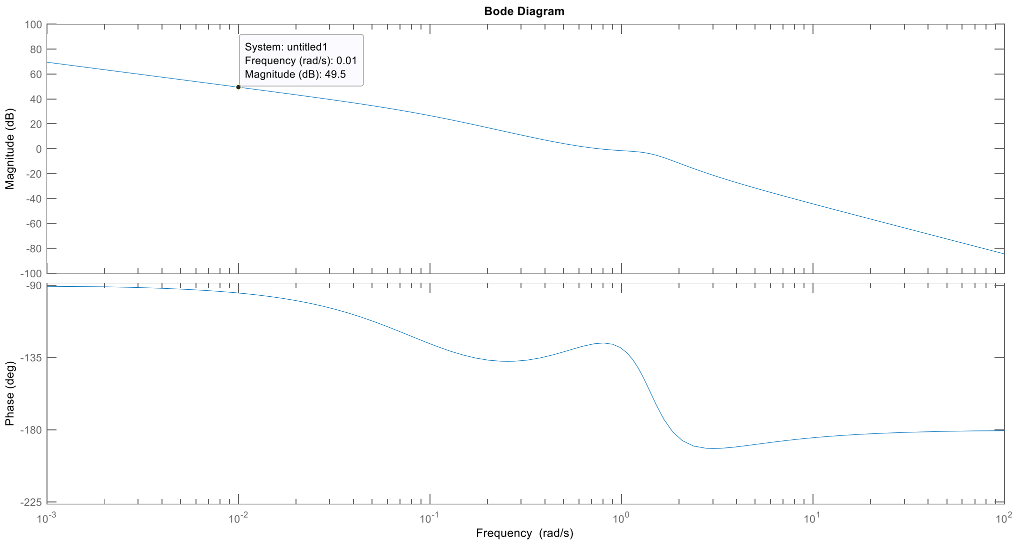
$G_2(s) = s(s+0.1)(s^2+s+2)$

در $s_1 = 0.1$ قطب حقیقی ساده داریم.

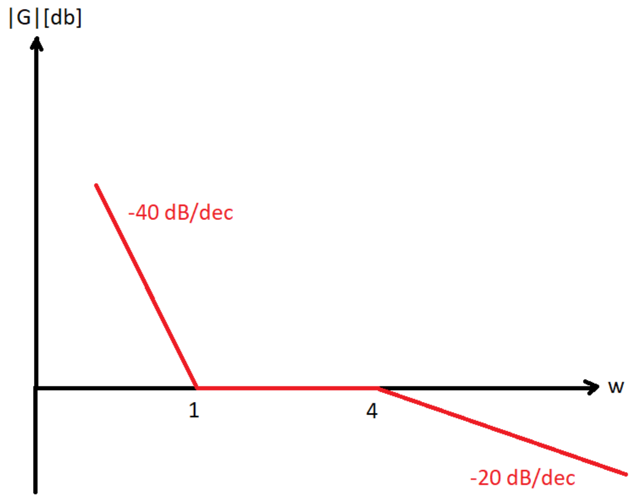
در $s_2 = \sqrt{2}$ قطب مرتبه دوم ساده داریم.

در $s_3 = 1$ صفر حقیقی مرتبه دوم داریم.

نقطه‌ی شروع با توجه به فرکانس 0.1 و بهره‌ی DC برابر با 50 db می باشد.



۵) شکل زیر نمودار بودی یک تابع تبدیل را نشان می دهد که هیچ قطبی در سمت راست صفحه s ندارد. تغییرات فاز سیستم را از $w=0$ تا $w=\infty$ بدست آورید.



پاسخ: تابع تبدیل و زاویه فاز سیستم به صورت زیر است که برای علامت منفی سیستم نامینیمم فاز و برای علامت مثبت مینیمم فاز است.

$$G(s)=\frac{k(1\pm s)^2}{s^2(1+\frac{s}{4})}$$

$$\measuredangle G(jw)=2\measuredangle(1\pm jw)-180°-Arctan(\frac{w}{4})$$

برای سیستم مینیمم فاز، مقدار زاویه در فرکانس‌های $w=0$ و$w=\infty$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\measuredangle(j0)=-180°$$

$$\measuredangle(j\infty)=2\times 90°-180°-90°=-90°$$

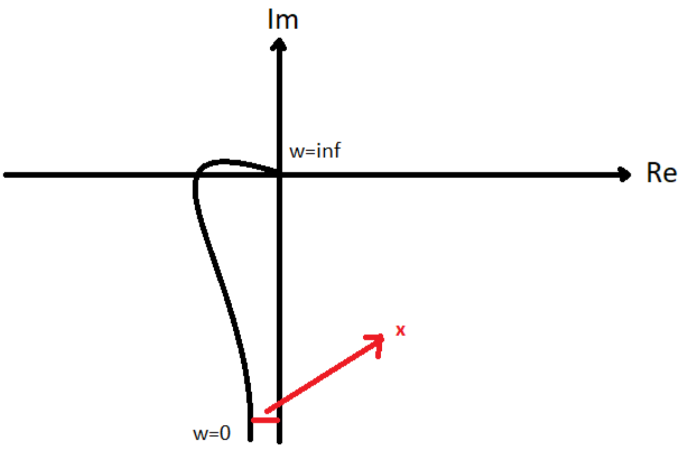
برای سیستم نامینیمم فاز، مقدار زاویه در فرکانس‌های $w = 0$ و $w = \infty$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\angle(j0) = -180°$$

$$\angle(j\infty) = 2 \times (-90°) - 180° - 90° = -450°$$

مشاهده می شود که تغییرات فاز سیستم مینیمم فاز کمتر از تغییرات فاز سیستم نامینیمم فاز است.

۶) نمودار قطبی سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $GH(jw) = \frac{1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ برای p_1 و p_2 های مثبت به صورت زیر است. با توجه به شکل، مقدار x را بدست آورید.



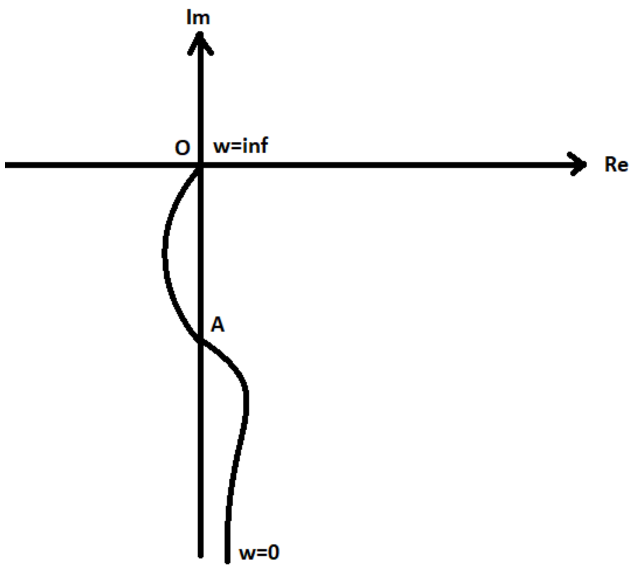
پاسخ: کافی است قسمت حقیقی $GH(jw)$ را به ازای $w = 0$ محاسبه کنیم.

$$GH(jw) = \frac{1}{jw[p_1 p_2 - w^2 + j(p_1 + p_2)w]}$$

$$Re[GH(jw)] = -\frac{p_1 + p_2}{(p_1 p_2 - w^2)^2 + [(p_1 + p_2)w]^2}$$

$$x = Re[GH(j0)] = -\frac{p_1 + p_2}{p_1^2 p_2^2}$$

۷) برای سیستمی با تابع حلقه $GH(s) = \frac{1+3s}{s(s+1)^2}$ دیاگرام نایکوئیست در شکل زیر نشان داده شده است. مقدار w در نقطه A و طول OA را بدست آورید.



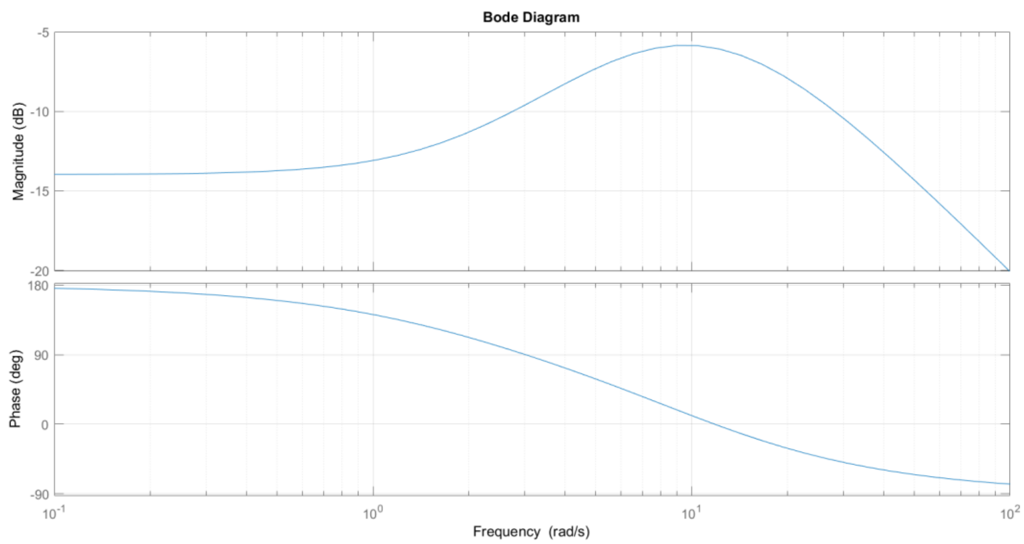
پاسخ: در نقطه A مقدار حقیقی تابع حلقه برابر صفر است.

$$GH(jw) = \frac{1+3jw}{jw(jw+1)^2}$$

$$Re[GH(jw)] = 0 \qquad \rightarrow \qquad -3w^3 + w = 0 \qquad \rightarrow \qquad w = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$Im\left[GH\left(\frac{j\sqrt{3}}{3}\right)\right] = -\frac{8\sqrt{3}}{7} \qquad \rightarrow \qquad OA = \frac{8\sqrt{3}}{7}$$

۸) نمودار بودی تابع تبدیل یک سیستم حلقه بسته در شکل زیر داده شده است. نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل را رسم کرده و پایداری نایکوئیست سیستم حلقه بسته را بررسی کنید (فرض کنید از یک کنترلر تناسبی برای کنترل سیستم استفاده می‌کنیم).



پاسخ:

با توجه به اینکه نمودار اندازه با شیب صفر آغاز شده است، تابع تبدیل صفر یا قطبی در مبدا ندارد. پس از فرکانس ۱، شیب نمودار اندازه برابر $\frac{20dB}{dec}$ بوده و در حال افزایش است که نشان می‌دهد تابع تبدیل یک صفر در بازه $s\epsilon(1,3)$ دارد. در این بازه، نمودار فاز در حال کاهش بوده که نشان‌دهنده وجود یک صفر غیر کمینه فاز است.

پس از فرکانس $\omega = 10\frac{rad}{s}$، نمودار با شیب $\frac{20dB}{dec}$ در حال کاهش است که نشانگر حضور یک قطب تکراری در بازه $s\epsilon(7,13)$ است.

بنابراین تابع تبدیل باید به فرم زیر باشد:

$$G_p = K\frac{s-\alpha}{(s+\beta)^2},\ \ \alpha<\beta$$

می‌توان تخمین زد که قطب تکراری حدوداً در $s\approx 10$ و صفر غیر کمینه فاز تقریبا در $s \approx 2$ قرار گرفته است. با استفاده از این اطلاعات بدست آمده می‌توان محاسبه کرد که تابع تبدیل دارای بهره نیز هست یا خیر.

$$20\log|G(j\omega)|_{\omega=0.1} \approx\ -14 \to K\frac{\sqrt{0.1^2+2^2}}{0.1^2+10^2} \approx 0.2 \to K\approx 10$$

$$\to \boldsymbol{G_p \approx 10\frac{s-2}{(s+10)^2}}$$

تابع تبدیل بهره به صورت زیر خواهد بود:

$$G_l = K_p.G_p = K_p.\left(10\frac{s-2}{(s+10)^2}\right)$$

$$\to G_l(j\omega)\ =\ \ K_P\frac{10j\omega-20}{100-\omega^2+20j\omega}$$

$$|G(j\omega)|_{\omega=0} = 0.2\,K_p\,,\ \ \measuredangle\, G(j\omega)|_{\omega=0}\ =\ \ 180$$

$$|G(j\omega)|_{\omega\to\infty} = 0\,,\ \ \measuredangle\, G(j\omega)|_{\omega\to\infty}\ =\ -90$$

$$G_l(j\omega)\ =\ \ K_P\frac{10j\omega-20}{100-\omega^2+20j\omega} = \frac{(10j\omega-20)(100-\omega^2-20j\omega)}{(100-\omega^2)^2+(20\omega)^2}$$

$$G_l(j\omega) = \frac{-2000+1400j\omega-10j\omega^3+220\omega^2}{(100-\omega^2)^2+(20\omega)^2}$$
$$= \frac{(220\omega^2-2000)+j(1400\omega-10\omega^3)}{(100-\omega^2)^2+(20\omega)^2}$$

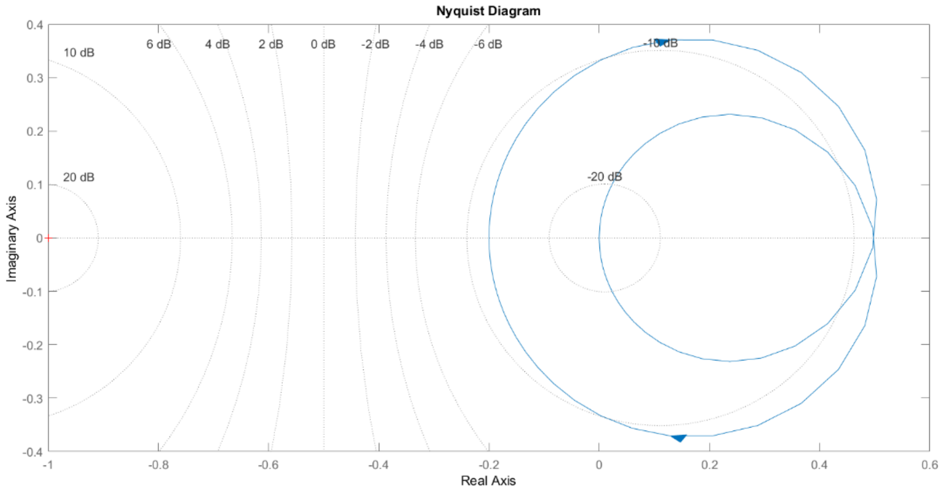
$$\mathrm{Re}\big(G_l(j\omega)\big) =\ \frac{(220\omega^2-2000)}{(100-\omega^2)^2+(20\omega)^2} = 0 \to \omega\approx 3$$

در نتیجه نمودار نایکوئیست در یک فرکانس روی محور موهومی قرار می‌گیرد.

$$\mathrm{Im}\big(G_l(j\omega)\big) =\ \frac{j(1400\omega-10\omega^3)}{(100-\omega^2)^2+(20\omega)^2} = 0 \to \omega = 0, 11.8$$

بنابراین نمودار نایکوئیست در دو فرکانس روی محور حقیقی قرار میگیرد.

نمودار نایکوئیست: بنابراین نمودار نایکوئیست در دو فرکانس روی محور حقیقی قرار میگیرد.



برای بررسی پایداری، چون در داخل دایره همواره ناپایدار است، خواهیم داشت:

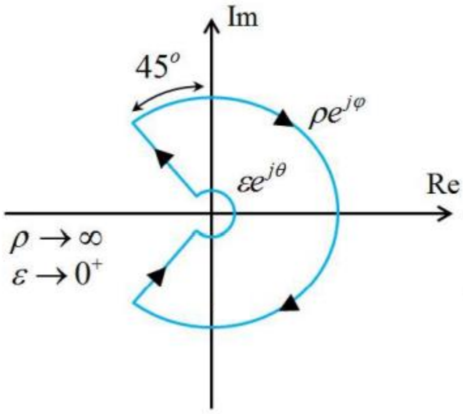
$$-\frac{1}{K_p} < -0.2 \rightarrow K_p < 5$$

$$-\frac{1}{K_p} > 0.5 \rightarrow K_p > -2$$

۹) سیستم فیدبک واحد با تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{2s}{s^2 + a}$$

با استفاده از کانتور نشان داده شده در شکل، نمودار نایکوئیست را رسم کنید. سپس بازه a را بیابید که سیستم پایدار باشد.



پاسخ:

ابتدا معادله مشخصه را محاسبه می‌کنیم:

$$1 + G(s) = 0 \to 1 + \frac{2s}{s^2 + a} = 0 \to s^2 + 2s + a = 0$$
$$1 + a\frac{1}{s(s+2)} = 0$$

با توجه به کانتور داده شده، s برابر خواهد بود با:

$$s = \omega e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega j$$

در نتیجه:

$$G\left(\omega e^{\frac{3\pi}{4}i}\right) = \frac{a}{-\omega^2 j - \sqrt{2}\omega + j\sqrt{2}\omega} = \frac{a}{-\sqrt{2}\omega + j\left(\sqrt{2}\omega - \omega^2\right)}$$

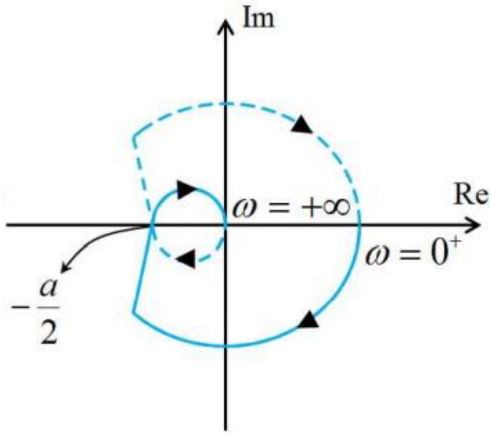
برای محاسبه تلاقی نمودار با محور حقیقی خواهیم داشت:

$$\mathrm{Im}\{G\} = 0 \to \sqrt{2}\omega = \omega^2 \to \omega = \sqrt{2}$$
$$G\left(\omega e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)|_{\omega=\sqrt{2}} = -\frac{a}{2}$$

برای پایداری:

$$-1 < -\frac{a}{2} \to a < 2$$

نمودار نایکوئیست:

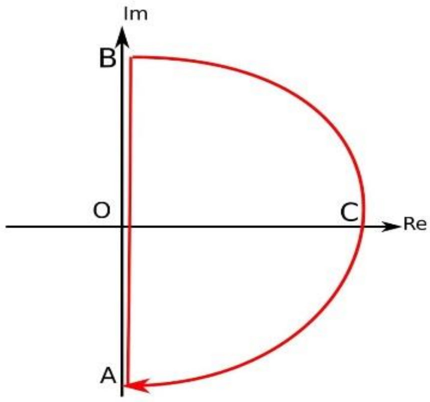


۱۰) ثابت کنید که نمودار نایکوئیست تابع تبدیل زیر، یک دایره با مرکز $s = \frac{k}{p}$ و شعاع $r = \frac{k}{p}$ است.

$$G(s) = \frac{2k}{2s + p}$$

پاسخ:

مسیر نایکوئیست را یک نیم‌دایره در نیم‌صفحه راست در نظر می‌گیریم.



مسیر BCA بعد از نگاشت در یک نقطه جمع می‌شود:

BCA: $Re^{j\theta},\ R \to \infty$

$G(Re^{j\theta}) = \frac{2k}{2Re^{j\theta}+p} = 0$

مسیر AOB منحنی نایکوئیست را رسم میکند. با توجه به تقارن منحنی نایکویست استفاده از مسیر OB برای بررسی سوال کفایت می‌کند.

OB: $j\omega,\ \omega = (0, \infty)$

$G(j\omega) = \frac{2k}{2j\omega+p} \times \frac{2j\omega-p}{2j\omega-p} = \frac{2k(2j\omega+p)}{p^2+4\omega^2} = \frac{2kp}{p^2+4\omega^2} - j\frac{4\omega}{p^2+4\omega^2}$

منحنی نایکوئیست از رابطه فوق به دست می‌آید. منحنی را به اندازه مرکز دایره انتقال می‌دهیم. در صورتی که اندازه مسیر همواره برابر مقدار ثابتی باشد، نمودار دایره ای است؛ و شعاع آن برابر با همان اندازه‌ی ثابت است.

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2kp}{p^2+4\omega^2} - \frac{k}{p}\right)^2 + \left(\frac{4k\omega}{p^2+4\omega^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2kp^2 - kp^2 - 4k\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{4k\omega}{p^2+4\omega^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(kp^2 - 4k\omega^2)^2 + 16k^2\omega^2p^2}{p^2(p^2+4\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{(kp^2+4k\omega^2)^2}{p^2(p^2+4\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{p^2}} = \frac{k}{p}$$

موفق باشید.