سیستم‌های کنترل خطی

حل تمرین چهارم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ۱۳۰۷
استاد: حمید رضا تقی راد

۱)

الف) ابتدا معادله مشخصه سیستم را به دست می‌آوریم:

$$1 + K\frac{1}{s+1}\frac{1}{s^2+2s+2} = 0$$

پس خواهیم داشت:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

برای محاسبه نقطه شروع نمودار ناکوئیست، کافی‌ست در تابع تبدیل $s = 0$ قرار دهیم.

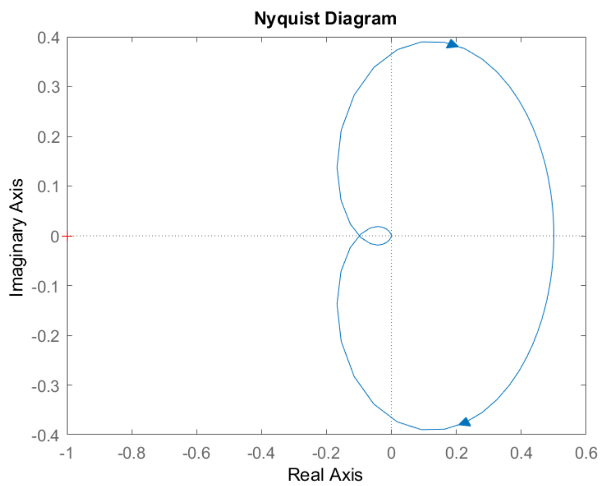
$$\lim_{s\to 0} G(s) = \frac{1}{2} = 0$$

و برای محاسبه نقطه تقاطع با محور حقیقی خواهیم داشت:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)(-\omega^2+2j\omega+2)}$$

$$Im\{G(j\omega)\} = 0 \to \omega \approx -2 \to Real\{G(jw)\} = -0.5$$

در نهایت نمودار نایکوئیست را رسم می‌کنیم:



ب) برای محاسبه بازه K خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{K} < -0.1 \rightarrow K < 10$$

$$-\frac{1}{K} > 0.5 \rightarrow K > -2$$

سپس با استفاده از معیار راث-هرویتز صحت سنجی می‌کنیم:

$$\Delta = s^3 + 3s^2 + 4s + 2 + K$$

s^3	1	4
s^2	3	$2+K$
s^1	$\frac{12-(2+K)}{3}$	
s^0	$2+K$	

در نتیجه:

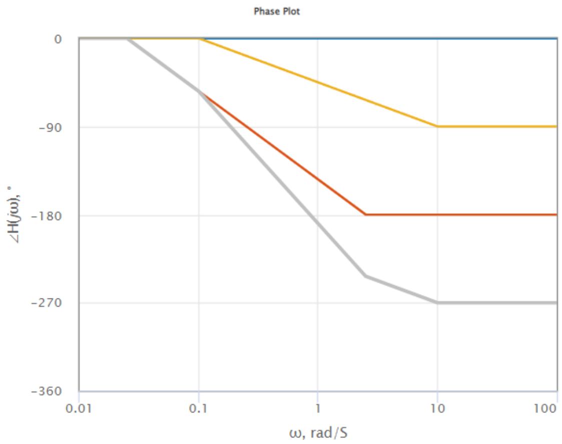
$$10 - K > 0 \rightarrow K < 10$$

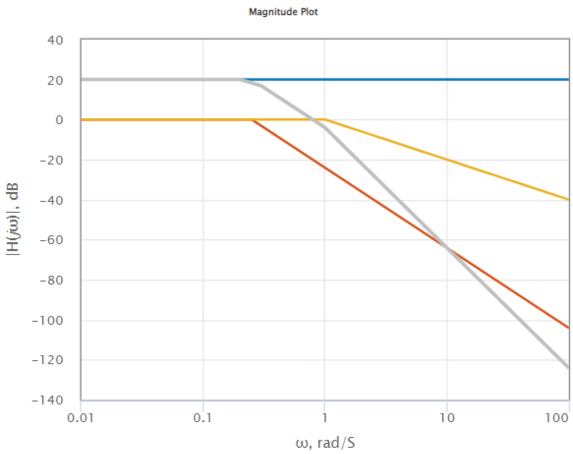
$$2 + K > 0 \rightarrow K > -2$$

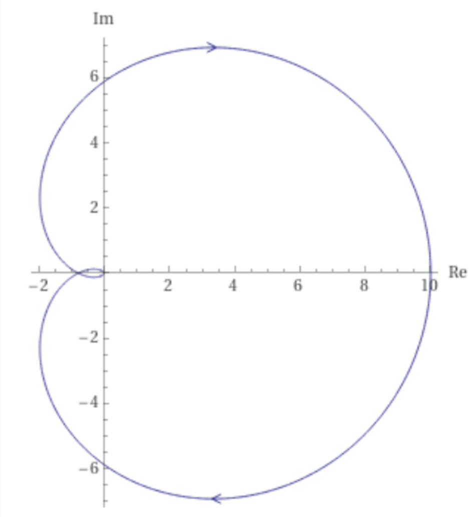
که با نتایج اولیه تطابق دارد.

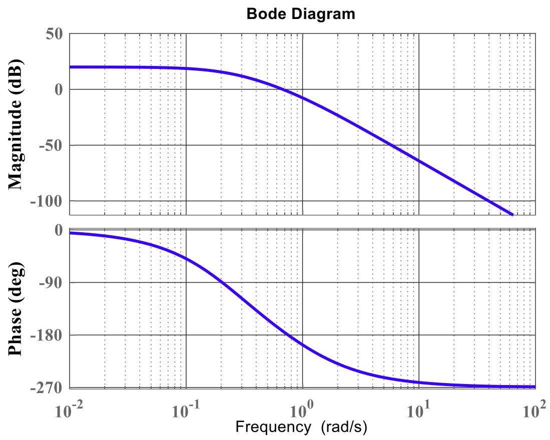
۲)

۱-۲)









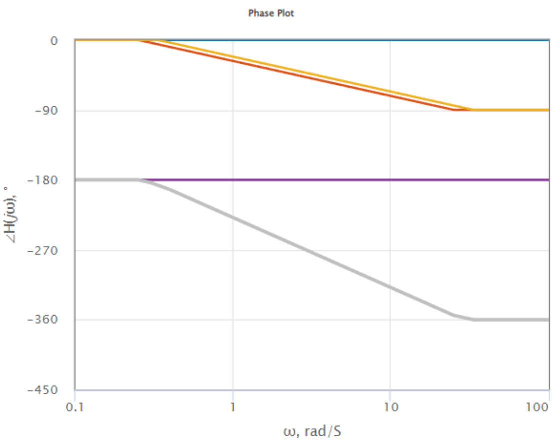
$$G(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+4j\omega)^2} = \frac{10}{-16j\omega^3 - 24\omega^2 + 9j\omega + 1}$$

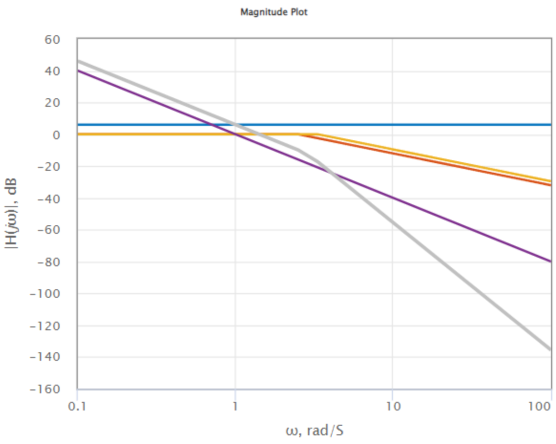
$$-16j\omega^3 + 9j\omega = 0 \rightarrow \omega = 0, \pm 0.75 \rightarrow G(j\omega) = 10, -0.8$$

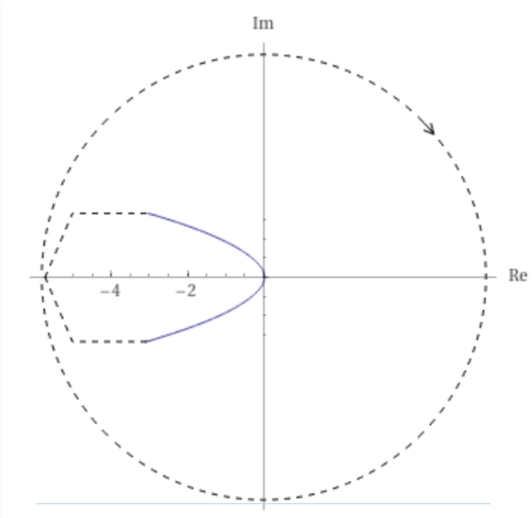
حدود پایداری:

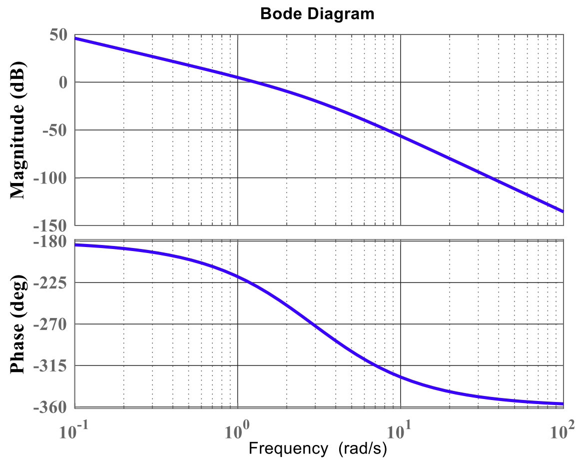
$$\begin{rcases} 10 < -\frac{1}{K} < \infty \rightarrow -0.1 < K < 0 \\ -\infty < -\frac{1}{K} < -0.8 \rightarrow 0 < K < 1.25 \end{rcases} \rightarrow -0.1 < K < 1.25$$

۲-۲)





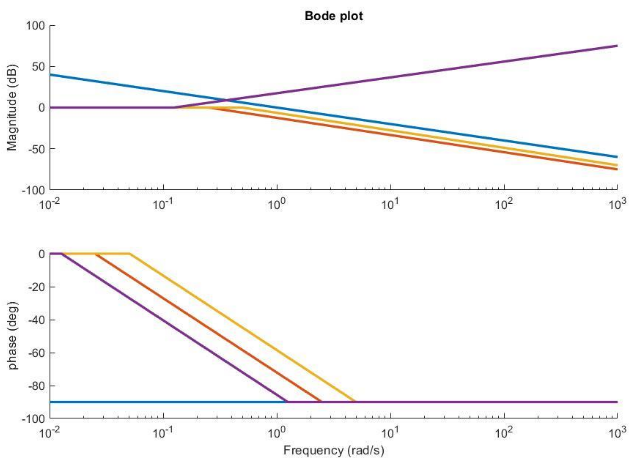


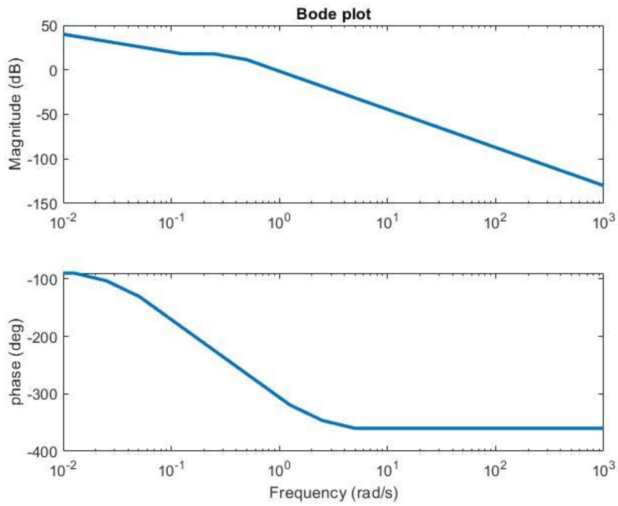


با توجه به دیاگرام نایکوئیست، هیچ مقداری از بهره، سیستم را پایدار نمی‌کند.

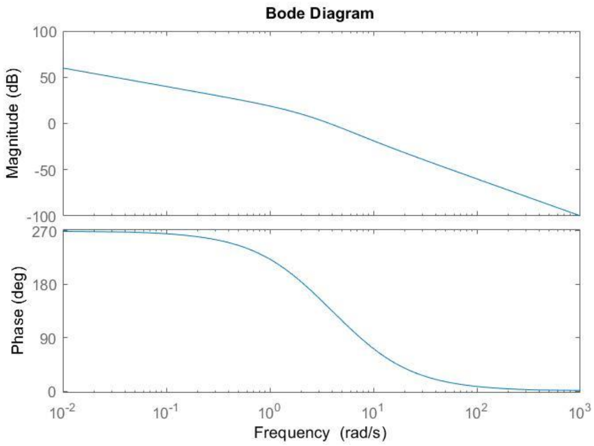
۲-۳)

نمودار بودی زیربخش‌های سیستم را رسم می‌کنیم و سپس با هم جمع می‌کنیم:

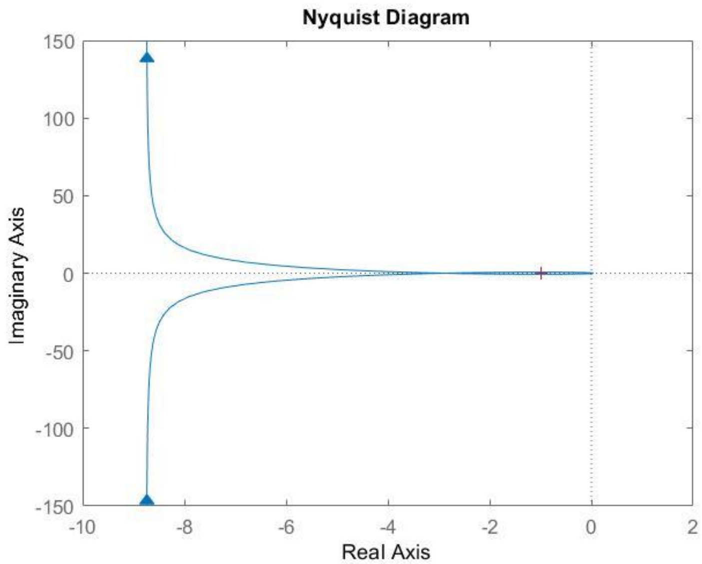




در زیر نمدار بودی با استفاده از متلب آمده است:



با توجه به نمودار بودی نمودار نایکویست را رسم می‌کنیم:



با توجه به اینکه سیستم حلقه باز در ۰ قطب دارد، نمودار فوق در بینهایت بسته می‌شود. سیستم حلقه باز قطب ناپایدار ندارد.

برای به دست آوردن محل تقاطع نمودار نایکویست با بخش منفی محور حقیقی به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$G(j\omega)=\frac{10\left(1-\frac{1}{8}j\omega\right)}{j\omega\left(1+\frac{1}{2}j\omega\right)\left(1+\frac{1}{4}j\omega\right)}=\frac{10(1-\frac{1}{8}j\omega)}{-\frac{3}{4}\omega^2+j\omega(1-\frac{1}{8}\omega^2)}\times\frac{-\frac{3}{4}\omega^2-j\omega(1-\frac{1}{8}\omega^2)}{-\frac{3}{4}\omega^2-j\omega(1-\frac{1}{8}\omega^2)}$$

$$=\frac{-\frac{3}{4}\omega^2-\frac{1}{8}\omega\left(1-\frac{1}{8}\omega^2\right)+j\left(\frac{3}{32}\omega^3-w+\frac{1}{8}\omega^3\right)}{\frac{9}{16}\omega^4+\omega^2(1-\frac{1}{8}\omega^2)^2}$$

$$=\frac{-\frac{3}{4}\omega^2-\frac{1}{8}\omega\left(1-\frac{1}{8}\omega^2\right)}{\frac{9}{16}\omega^4+\omega^2(1-\frac{1}{8}\omega^2)^2}+j\frac{(\frac{3}{32}\omega^3-w+\frac{1}{8}\omega^3)}{\frac{9}{16}\omega^4+\omega^2(1-\frac{1}{8}\omega^2)^2}$$

$$Imag\{G(j\omega)\}=0\Rightarrow\left(\frac{3}{32}\omega^3-\omega+\frac{1}{8}\omega^3\right)=0\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{32}{7}}=4\frac{\sqrt{14}}{7}\,\frac{rad}{s}$$

$$\Rightarrow Real\left\{G\left(j4\frac{\sqrt{14}}{7}\right)\right\}\approx-2.9$$

با توجه به اینکه سیستم حلقه باز قطب ناپایدار ندارد، منحنی نایکویست برای پایداری سیستم نباید دور 1/k- بچرخد. برای k های منفی، ۱- بار چرخش داریم. برای k مثبت داریم:

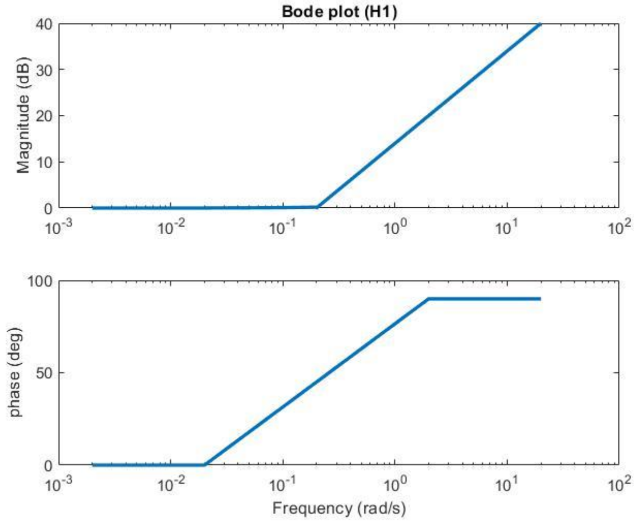
$$-2.9<-\frac{1}{K}<0\Rightarrow +2 \text{ چرخش} \Rightarrow \text{ناپایدار}$$

$$-\frac{1}{K}<-2.9\Rightarrow\ k<\frac{1}{2.9}=0.35\Rightarrow 0 \text{ چرخش} \Rightarrow \text{پایدار}$$

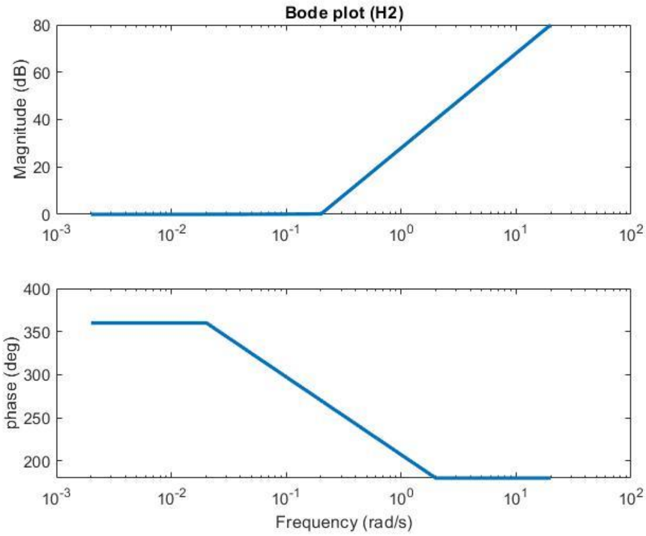
۳)

الف) نمودار بودی زیر سیستم‌ها را با توجه به مطالب گفته شده رسم می‌کنیم:

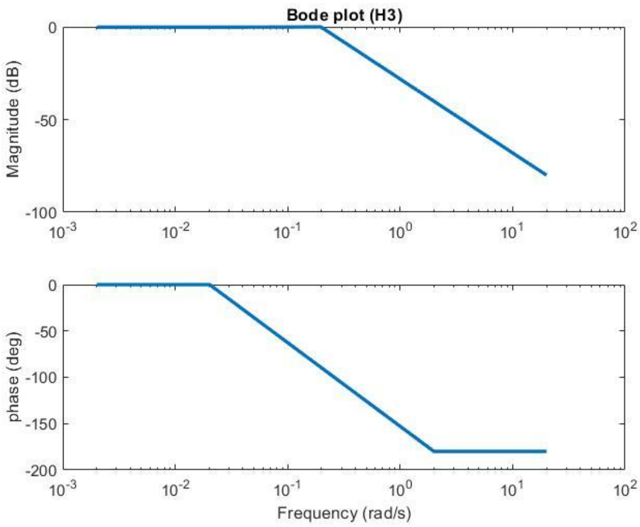
$H_1(s)=5s+1$



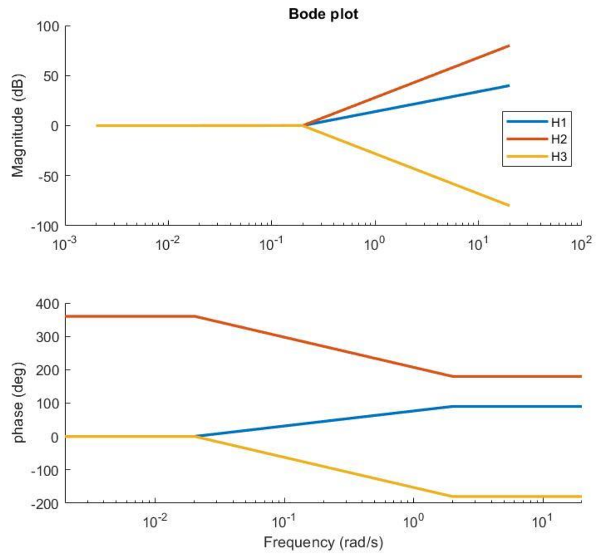
$$H_2(s) = s^2 - 2s + 2$$



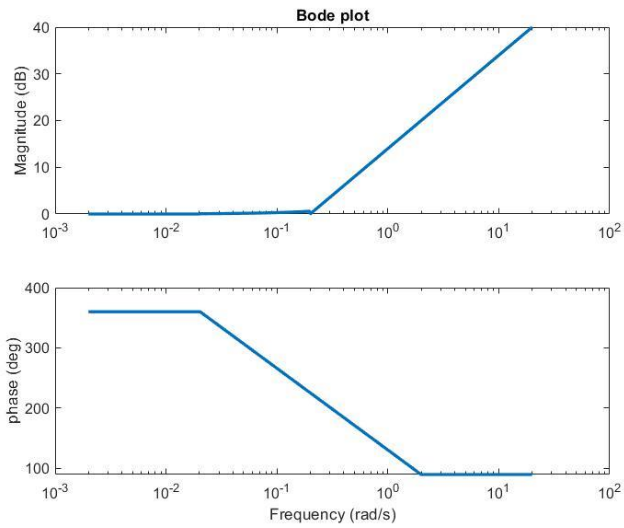
$$H_3(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$$



در زیر سه نمودار فوق در کنار هم آمده است:



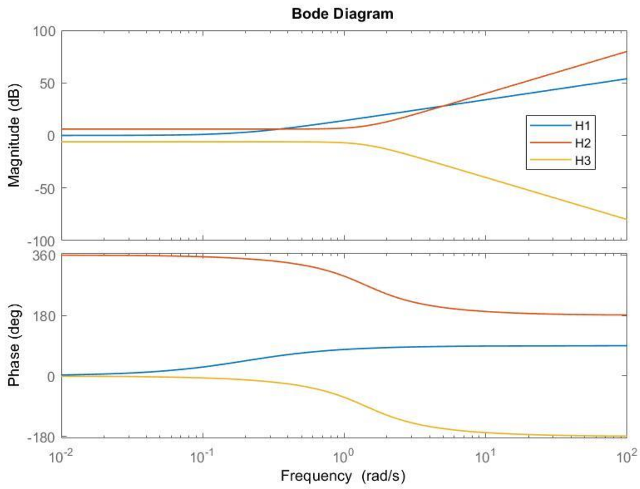
با جمع کردن نمودارها داریم:

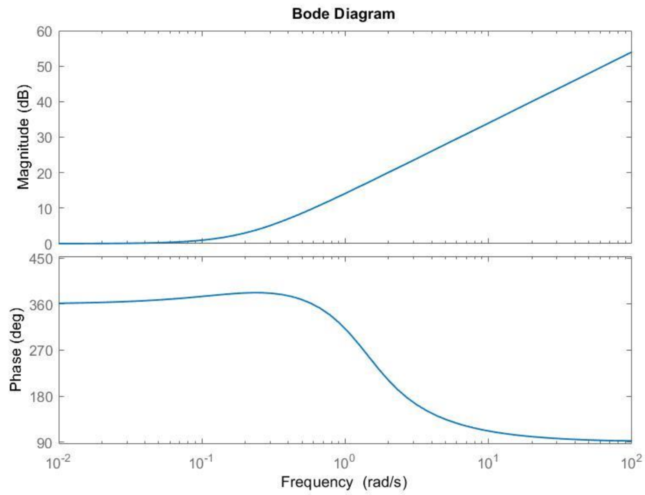


ب) با استفاده از کد زیر به کمک متلب نمودار بودی را رسم می‌کنیم.

```
clear; close all; clc;
s = tf('s');

H1 = 5*s + 1;
H2 = (s*s -2*s +2);
H3 = 1/(s*s + 2*s + 2);

bode(H1);
hold on
bode(H2);
bode(H3);
legend("H1", "H2", "H3")

G = H1*H2*H3;
figure
bode(G)
```

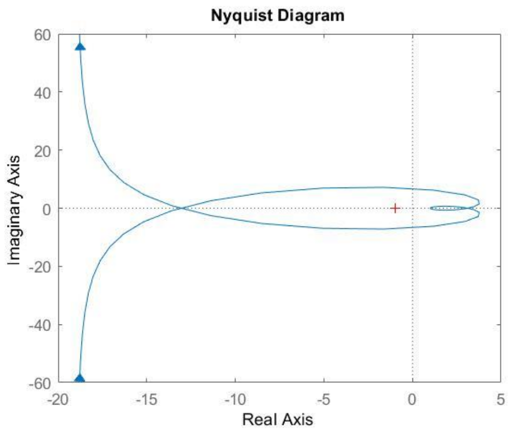
نمودارها به صورت زیر اند:





مشاهده می‌شود که نمودارها در روش دستی مشابه حل کامپیوتری هستند.

ج) ابتدا نمودار نایکویست را به توجه به نمودار بودی به طور تقریبی رسم می‌کنیم.



نمودار ۳ بار با محور حقیقی برخورد دارد که لازم است مختصاتشون را داشته باشم.

در تابع تبدیل $s = j\omega$ را جاگذاری میکنیم:

$$G(j\omega) = \frac{(-\omega^2 - 2j\omega + 2)(5j\omega + 1)}{(-\omega^2 + 2j\omega + 2)} \times \frac{(2-\omega^2 - 2j\omega)}{(2 - \omega^2 + 2j\omega)} = \frac{(-\omega^2 - 2j\omega + 2)^2(5j\omega + 1)}{(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}$$
$$= \frac{20(2 - \omega^2)\omega^2 + (2 - \omega^2)^2 - 4\omega^2}{(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2} + j\frac{5(2 - \omega^2)^2\omega - 20\omega^3 - 4(2 - \omega^2)\omega}{(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

$$Imag\{G(j\omega)\} = 0 \Rightarrow (5(2 - \omega^2)^2\omega - 20\omega^3 - 4(2 - \omega^2)\omega) = 0 \to \cdots \to \omega = 0, \pm 0.59, \pm 2.6$$

با توجه به اینکه در حال رسم کردن فرکانس مثبت منحنی نایکویست هستیم، فرکانس‌های منفی غیر قابل قبول اند.

$$\Rightarrow Real\{G(j0)\} = 1, \qquad Real\{G(j0.59)\} \approx 3.12, \qquad Real\{G(j2.6)\} \approx -13.04$$

با توجه به اینکه تابع تبدیل حلقه باز قطب ناپایدار ندارد(p=0)، تعداد گردش حول ۱- باید ۰ باشد (N=0) تا سیستم حلقه بسته پایدار باشد. به این منظور 1/k- باید در بازه های زیر باشد:

$$K > 0:\ -\frac{1}{K} < -13.04 \ \to K < 0.077$$

$$K < 0: -\frac{1}{K} > 3.12 \to \ K > -0.32$$

محدوده پایداری سیستم حلقه بسته با کنترل کننده بهره ثابت:

$$-0.32 < K < 0.077$$

۴)

الف)

قطب در مبدا ← شیب نمودار = $|w| = 0^+ \to \ -20\frac{dB}{dec}$

قطب در $s = -\alpha$ ← شیب نمودار = $|w| = \infty \to \ -90\frac{dB}{dec}$

$$\to G(s) \ = \ \frac{k}{s(s + \alpha)}$$

$$\measuredangle\, G(j\omega) = \ -90^\circ - \tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha}\ , \qquad \measuredangle\, G(j\omega)|_{\omega=3} = \ -120^\circ$$

$$\to \tan^{-1}\frac{3}{\alpha} = 30^\circ \to \frac{3}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3} \to \alpha = 3\sqrt{3}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\omega\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}, \qquad |G(j\omega)||_{\omega=30} = 0.1$$

$$\rightarrow \frac{k}{913.9} = 0.1 \rightarrow K = 91.34 \rightarrow \boldsymbol{G(s)} = \frac{\mathbf{91.34}}{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}+\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}})}$$

ب)

$$G(s) = K\frac{(s+\alpha)(s+\beta)}{(s^2+\omega_n^2)(s+\gamma)}$$

صفر در $1 \rightarrow$ فاز $45°$ در $\omega = 1$

صفر در $25 \rightarrow$ در $\omega \approx 25$ افزایش فاز داریم

قطب مختلط در $4 \rightarrow$ در $\omega = 4$ تشدید اتفاق افتاده است

پس از فرکانس تشدید، فاز اندکی کاهش یافته و سپس افزایش یافته است. دلیل این کاهش فاز می‌تواند حضور یک قطب در بازه $s\epsilon\ (4, 15)$ باشد. به صورت تقریبی فرض میکنیم قطب در $s = 9$ باشد.

در فرکانس $\omega = 0.01$ مقدار اندازه تابع تبدیل تقریبا برابر $-10\ dB$ است.

$$20\log|G(j\omega)| = -10 \rightarrow K\frac{\sqrt{0.01^2+1}.\sqrt{0.01^2+25^2}}{(0.01^2+16)\left(\sqrt{0.01^2+9^2}\right)} = 0.316 \rightarrow\ K = 1.82$$

موفق باشید.