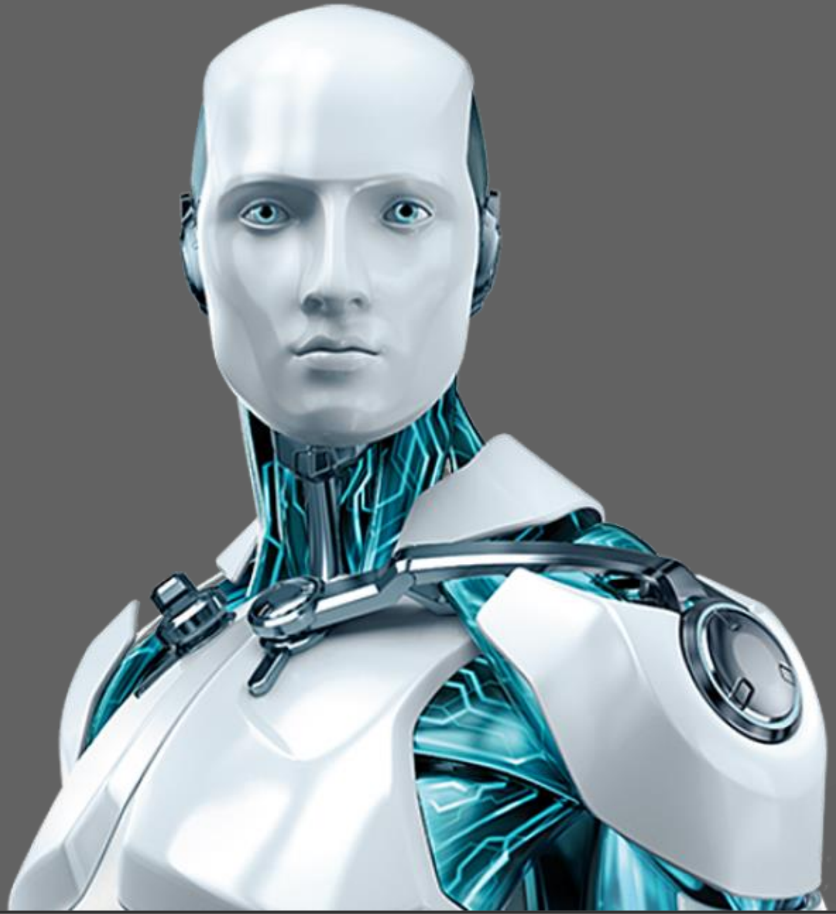
گروه رباتیک ارس

سیستم های کنترل خطی

فصل سوم: تحلیل و طراحی با مکان هندسی ریشه ها

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازی و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربری متنوع روش ترسم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلگر های کاربردی، P، PD، Lead، Lag و Lead-Lag خواهیم پرداخت.



به چشم انداز

کسب مهارت های لازم

در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل خطی

خوش آمدید

در باره گروه رباتیک ارس

گروه رباتیک ارس از ۱۳۷۶ و با بیش از ۲۴ سال تجربه، خدمات خود را در گسترش آموزش مهندسی و پژوهش در لبه های دانش را در زمینه تحلیل و طراحی سیستم های دینامیکی در کاربرد رباتیک ارائه می دهد. **گروه رباتیک ارس** به خوبی توسط کارشناسان صنعتی، پژوهشگران و شخصیت های علمی دانش آموخته خود و همچنین با سوابق فراوان موفق پروژه های تحقیق و توسعه خود در سراسر کشور و در جوامع علمی بین المللی شناخته می شود. مهمترین پشتوانه این گروه ظرفیت نیروی انسانی وسیع گروه است که تمام سعی و اهتمام خود را به گسترش دانش و فناوری معطوف نموده اند. یکی از مهمترین اهداف گروه استفاده از این پتانسیل ها به منظور گسترش ارتباطات آکادمیک و صنعتی در سطح ملی و بین المللی است. ماموریت گروه رباتیک ارس توسعه پهنه دانش و تعمیق کیفیت آموزش و پژوهش در یک محیط پویا و شاداب است.

عناوین فصل

مقدمه

۱ چرا مکان هندسی ریشه ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، شرایط اندازه و زاویه، روش هندسی نمایش شرایط اندازه و زاویه

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

۲ نقاط ابتدا و انتهایی، تعداد شاخه ها، تقارن مکان، مجانب ها، نقاط روی محور حقیقی، نقاط تقاطع شاخه ها با محور حقیقی و موهومی و زاویه ورود یا خروج از قطب و صفر

مثال های کاربردی

۳ روش گام به گام ترسیم دستی، روش کامپیوتری، سیستم درجه دو، اضافه کردن یک قطب نزدیک، دورکردن قطب از مبدا، سیستم مرتبه چهار و پنج، تقارن حول محور عمودی

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

۴ تعیین بهره حلقه به صورت دستی و کامپیوتری از روی مکان هندسی ریشه ها، اضافه کردن یک یا دو قطب پایدار به سیستم، اضافه کردن یک یا دو صفر سمت چپ به سیستم.

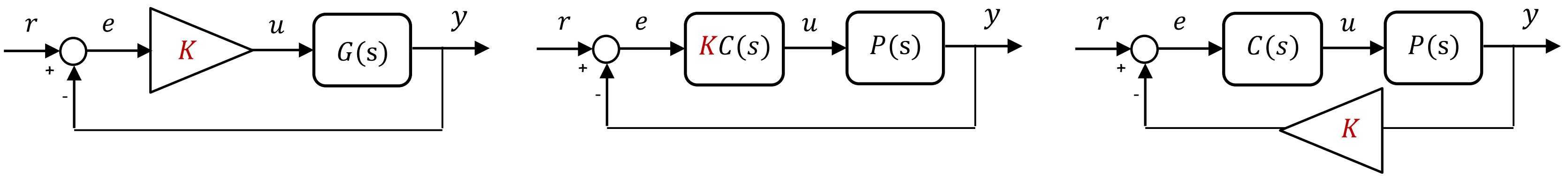
طراحی سیستم کنترل توسط مکان

۵ کنترلگر بهره ثابت، جبران ساز های دینامیکی، معرفی چند کنترلگر کاربردی، طراحی کنترلگر PD، Lead، Lag و Lead-Lag، تحلیل مسائل ابتکاری

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازی و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربری متنوع روش ترسم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلگر های کاربردی، P، PD، Lead، Lag و Lead-Lag خواهیم پرداخت.

- **چرا مکان هندسی ریشه ها**

✓ در یک سیستم کنترل تحلیل پایداری و رفتار زمانی سیستم بر حسب بهره کنترلگر K مورد توجه است.



$$L(s) = KG(s)$$
$$\Delta(s) = 1 + KG(s)$$

$$L(s) = KC(s)P(s) = KG(s)$$
$$\Delta(s) = 1 + KG(s)$$

$$L(s) = C(s)P(s) = G(s)$$
$$\Delta(s) = 1 + KG(s)$$

❑ در سه حالت فوق و حالت های دیگر معادله مشخصه سیستم یکسان است

❑ پایداری سیستم حلقه بسته به محل ریشه های $\Delta(s)$ مرتبط است

❑ رفتار گذرا و ماندگار سیستم حلقه بسته نیز به محل ریشه های $\Delta(s)$ مرتبط است

✓ با ترسیم مکان هندسی ریشه ها در صفحه S می توان به ازای مقادیر مختلف K پایداری و رفتار زمانی سیستم را تحلیل و با انتخاب مناسب K آنرا طراحی نمود.

- **شرایط اندازه و زاویه**

✓ فرض کنید می خواهیم به ازای مقادیر مختلف $\infty < K < \infty-$ ریشه های معادله مشخصه یک سیستم حلقه بسته را تعیین کنیم:
$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 0$$

✓ با فرض معین بودن تابع تبدیل $G(s)$:
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow D(s) + KN(s) = 0$$

❑ معادله مشخصه سیستم تبدیل به چند جمله ای (معمولا بالاتر از مرتبه دو) تابعی از K می شود.
$$D(s) + KN(s) = 0$$

❑ از معیار پایداری راث می توان برای تعیین محدوده پایداری استفاده نمود ولی محل قطب ها را نمی توان تعیین نمود.

❑ با استفاده از روش های عددی نیز می توان به ازای هر مقدار K محل ریشه ها را در صفحه مختلط s تعیین نمود.

❑ مکان هندسی ریشه ها روشی ترسیمی است که با قواعد مشخص محل تقریبی ریشه ها را در صفحه مختلط s معلوم می کند.

✓ هر ریشه (حقیقی یا مختلط) که در معادله فوق صدق کند بایستی دو شرط زاویه و اندازه را ارضا نماید.

- **شرایط اندازه و زاویه**

✓ معادله مشخصه سیستم را در نظر بگیرید:

$$1 + KG(s) = 0$$

❑ در این صورت:

$$G(s) = -\frac{1}{K}$$

✓ شرط اندازه:

❑ هر مقدار s که ریشه این معادله باشد بایستی در شرط زیر صدق کند:

$$|G(s)| = \frac{1}{|K|}$$

✓ شرط زاویه:

❑ هر مقدار s که ریشه این معادله باشد بایستی در شرط زیر صدق کند:

❑ به ازای $K > 0$ بایستی $\measuredangle G(s) = (2k+1)\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

❑ به ازای $K < 0$ بایستی $\measuredangle G(s) = 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

✓ مکان هندسی ریشه ها روشی ترسیمی است که نقاطی در صفحه S که این شرایط را ارضا می کنند را تعیین می کند.

- ## شرایط اندازه و زاویه

✓ حال فرض کنید تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت زیر داده شده باشد:

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

❑ که در آن z_i صفرها و p_i قطب های (حقیقی یا مختلط) تابع تبدیل سیستم حلقه باز می باشند. در این صورت:

✓ شرط اندازه:

$$|G(s)| = \frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{i=1}^{n}|s+p_i|} = \frac{1}{|K|}$$

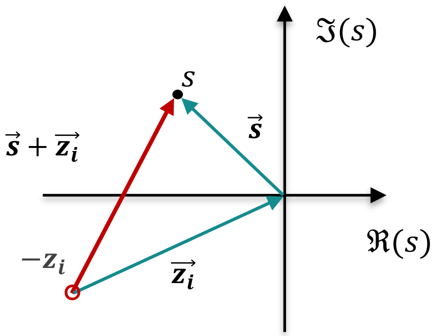
✓ شرط زاویه:

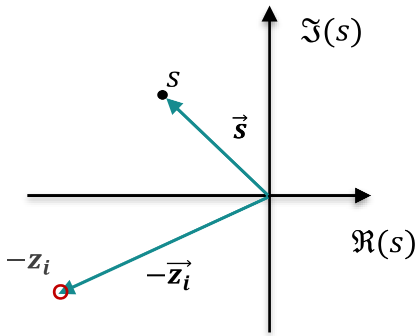
$$\measuredangle G(s) = \sum_{i=1}^{m}\measuredangle(s+z_i) - \sum_{i=1}^{n}\measuredangle(s+p_i) = \begin{cases}(2k+1)\pi, & k=0,\pm1,\pm2,\ldots \quad \text{FOR} \quad K>0\\ 2k\pi, & k=0,\pm1,\pm2,\ldots \quad \text{FOR} \quad K<0\end{cases}$$

- شرایط اندازه و زاویه

✓ نمایش برداری $s+z_i$ و $s+p_i$

$$\overrightarrow{s+z_i} = \vec{s} + \vec{z_i} = \vec{s} - (-\vec{z_i})$$





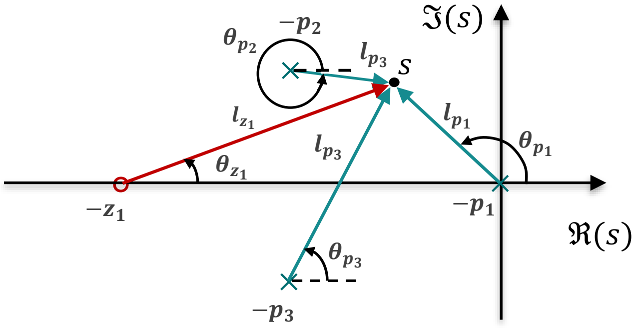
✓ نمایش برداری $s+z_i$ برداری است که از نقطه $-z_i$ (صفر سیستم) شروع و به نقطه s ختم می شود.

- **شرایط اندازه و زاویه**

✓ به منظور نمایش ترسیمی فرض کنید:

$$G(s) = \frac{s+z_1}{s(s+p_2)(s+p_3)}$$

❑ بردار مرتبط با صفر را با رنگ قرمز و بردارهای مربوط به قطب ها را با رنگ سبز ترسیم کنید:



✓ در این صورت اگر s یک ریشه معادله مشخصه باشد، آنگاه:

❑ شرط اندازه:

$$\frac{l_{z_1}}{l_{p_1} \cdot l_{p_2} \cdot l_{p_3}} = \frac{1}{|K|}$$

❑ شرط زاویه:

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = \begin{cases} (2k+1)\pi, & \text{FOR} \quad K > 0 \\ 2k\pi, & \text{FOR} \quad K < 0 \end{cases}$$

برگرفته از کتاب Kuo

- **شرایط اندازه و زاویه**

✓ بدین ترتیب یافتن نقاط s که بر روی مکان هندسی ریشه ها قرار دارند در دو مرحله جستجو می شوند

❑ جستجو در تمامی نقاط صفحه s و یافتن نقاطی که یکی از شرایط زاویه را ارضا کنند.

❑ یافتن بهره حلقه K (مثبت و یا منفی) که شرط اندازه را ارضا کند.

✓ این جستجو از محل قرار گیری صفرها و قطب های سیستم حلقه باز $G(s)$ و با قوانینی که در ادامه ارائه می شود انجام خواهد شد.

✓ نماد و نمایش: فرض کنید محل قرار گیری ریشه های معادله مشخصه به ازای بهره مثبت $K > 0$ را به RL می نامیم و با خطوط توپر نمایش دهیم

و آنرا به ازای بهره منفی $K < 0$ با CRL نامیده و با خط چین نمایش دهیم.

عناوین فصل

مقدمه

۱ چرا مکان هندسی ریشه ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، شرایط اندازه و زاویه، روش هندسی نمایش شرایط اندازه و زاویه

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

۲ نقاط ابتدا و انتهایی، تعداد شاخه ها، تقارن مکان، مجانب ها، نقاط روی محور حقیقی، نقاط تقاطع شاخه ها با محور حقیقی و موهومی و زاویه ورود یا خروج از قطب و صفر

مثال های کاربردی

۳ روش گام به گام ترسیم دستی، روش کامپیوتری، سیستم درجه دو، اضافه کردن یک قطب نزدیک، دورکردن قطب از مبدا، سیستم مرتبه چهار و پنج، تقارن حول محور عمودی

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

۴ تعیین بهره حلقه به صورت دستی و کامپیوتری از روی مکان هندسی ریشه ها، اضافه کردن یک یا دو قطب پایدار به سیستم، اضافه کردن یک یا دو صفر سمت چپ به سیستم.

طراحی سیستم کنترل توسط مکان

۵ کنترلگر بهره ثابت، جبران ساز های دینامیکی، معرفی چند کنترلگر کاربردی، طراحی کنترلگر PD، Lead، Lag و Lead-Lag، تحلیل مسائل ابتکاری

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازی و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربردی متنوع روش ترسم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلگر های کاربردی، P، PD، Lead، Lag و Lead-Lag خواهیم پرداخت.

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

- **قانون ۱: نقاط ابتدا و انتها**

✓ نقطه ابتدایی مکان هندسی ریشه ها، به ازای $K = 0$ در محل قطب های $G(s)$ قرار دارند.

✓ نقاط انتهایی به ازای $K = \pm\infty$ در محل صفر های $G(s)$ و یا به صورت مجانبی در بینهایت قرار دارند.

- **قانون ۲: تعداد شاخه ها**

✓ تعداد شاخه ها در مکان هندسی ریشه ها برابر مرتبه چندجمله ای مشخصه سیستم است.

❑ مرتبه چند جمله ای مشخصه سیستم های کنترل علّی، برابر تعداد قطب های سیستم است،

❑ چرا که سیستم های علّی سره یا اکیدا سره بوده و تعداد صفرهای سیستم حداکثر برابر تعداد قطب های سیستم خواهد بود.

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

- **قانون ۳: تقارن**

✓ مکان هندسی ریشه ها، نسبت به محور حقیقی متقارن است.

✓ اگر در سیستمی محل قرار گیری صفر ها و قطب ها نسبت به محور دیگری نیز متقارن باشند، آنگاه مکان هندسی ریشه ها نسبت به آن محور نیز متقارن است.

- **قانون ۴: مجانب ها**

✓ به ازای $K \rightarrow \pm\infty$ شاخه های مکان هندسی ریشه ها به سمت محورهایی مجانب خواهند شد:

❑ زاویه محورهای مجانب در RL برابر $\theta_k = (2k+1)\pi/(n-m)$,

❑ زاویه محورهای مجانب در CRL برابر $\theta_k = 2k\pi/(n-m)$,

❑ محل تلاقی مجانب ها بر روی محور حقیقی برابر است با: $\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$

❑ که در آن n تعداد قطب ها و m تعداد صفرهای $G(s)$ است

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

- **قانون ۵: نقاط روی محور حقیقی**
  - ✓ RL: بخشی از محور حقیقی که مجموع تعداد صفر ها و قطب های حقیقی در سمت راست آن عددی فرد باشند بر روی مکان هندسی ریشه ها با بهره مثبت قرار دارند.
  - ✓ CRL: بخشی از محور حقیقی که مجموع تعداد صفر ها و قطب های حقیقی در سمت راست آن عددی زوج باشند بر روی مکان هندسی ریشه ها با بهره منفی قرار دارند.
  - ❑ بدین ترتیب محور حقیقی همواره بخشی از مکان هندسی ریشه های کامل سیستم است.
- **قانون ۶: نقاط جدایی شاخه ها**
  - ✓ نقاط جدایی شاخه ها در صورت وجود در شرط $\frac{dG(s)}{ds}=0$ صدق می کند.
  - ❑ اگر معادله فوق دارای ریشه حقیقی باشد، آن نقطه جدایی حتما محل تقاطع شاخه های RL یا CRL با محور حقیقی است.
  - ❑ اگر معادله فوق ریشه حقیقی نداشته باشد، شاخه ها از محور حقیقی جدایش ندارند، ولی اگر این نقطه شرایط زاویه و اندازه را ارضا کند نقطه جدایش شاخه ها نه بر روی محور حقیقی بلکه در صفحه S خواهد بود.

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

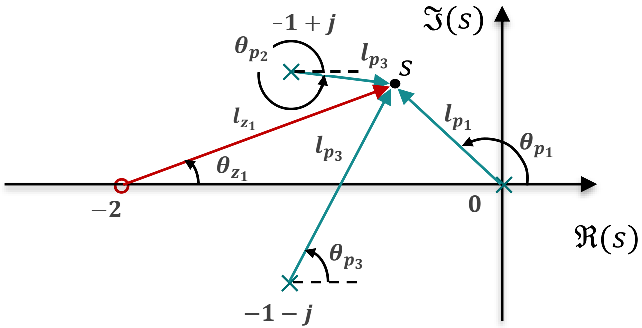
- **قانون ۷: زاویه ورود یا خروج**

✓ زاویه خروج: زاویه ایست که تحت آن زاویه، شاخه مکان هندسی از قطب مربوطه جدا می شود.

✓ زاویه ورود: زاویه ایست که با آن زاویه، شاخه مکان هندسی به صفر مربوطه وارد می شود.

❑ برای تعیین این زاویه، از شرط زاویه استفاده کرده، نقطه ای فرضی در نزدیکی قطب (یا صفر) مورد نظر در نظر گرفته و شرط زاویه را برای این نقطه می نویسیم.

❑ سپس حد زوایا را وقتی نقطه مورد نظر به سمت قطب (یا صفر) مورد نظر میل می کند به دست می آوریم:



زاویه خروج از قطب دوم را بدین صورت پیدا می کنیم:

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = (2k+1)\pi$$

بدین ترتیب در حد و به ازای قطب ها و صفرهای داده شده در شکل داریم:

$$\frac{\pi}{4} - \left(\frac{3\pi}{4} + \theta_{p_2} + \frac{\pi}{2}\right) = 3\pi \rightarrow \theta_{p_2} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

عناوین فصل

مقدمه

۱ چرا مکان هندسی ریشه ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، شرایط اندازه و زاویه، روش هندسی نمایش شرایط اندازه و زاویه

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

۲ نقاط ابتدا و انتهایی، تعداد شاخه ها، تقارن مکان، مجانب ها، نقاط روی محور حقیقی، نقاط تقاطع شاخه ها با محور حقیقی و موهومی و زاویه ورود یا خروج از قطب و صفر

مثال های کاربردی

۳ روش گام به گام ترسیم دستی، روش کامپیوتری، سیستم درجه دو، اضافه کردن یک قطب نزدیک، دورکردن قطب از مبدا، سیستم مرتبه چهار و پنج، تقارن حول محور عمودی

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

۴ تعیین بهره حلقه به صورت دستی و کامپیوتری از روی مکان هندسی ریشه ها، اضافه کردن یک یا دو قطب پایدار به سیستم، اضافه کردن یک یا دو صفر سمت چپ به سیستم.

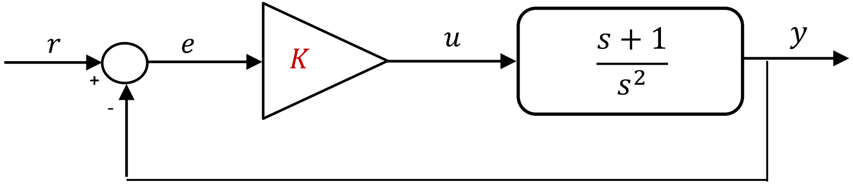
طراحی سیستم کنترل توسط مکان

۵ کنترلگر بهره ثابت، جبران ساز های دینامیکی، معرفی چند کنترلگر کاربردی، طراحی کنترلگر PD، Lead، Lag و Lead-Lag، تحلیل مسائل ابتکاری

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازی و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربری متنوع روش ترسم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلگر های کاربردی، P، PD، Lead، Lag و Lead-Lag خواهیم پرداخت.

مثال های کاربردی

- **مثال ۱: سیستم زیر را در نظر بگیرید:**



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

❑ دو شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K = 0 \rightarrow s = 0,\ s = 0, \quad K = \pm\infty,\ s = -1,\ 1\ \text{branch} \rightarrow \infty$$

تنها نسبت به محور حقیقی تقارن وجود دارد

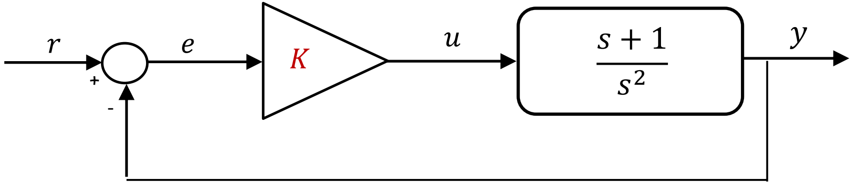
تعداد و مشخصات مجانب ها

❑ با توجه به اینکه $n - m = 1$ یک مجانب در RL و یک مجانب در CRL وجود دارد که منطبق با محور حقیقی است

$$\text{For } k > 0 \ \rightarrow \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{1} \rightarrow \theta_0 = \pi = 180^\circ \quad \text{For } k < 0 \ \rightarrow \theta_k = \frac{2k\pi}{1} \rightarrow \theta_0 = 2\pi = 360^\circ$$

مثال های کاربردی

- ادامه مثال ۱:

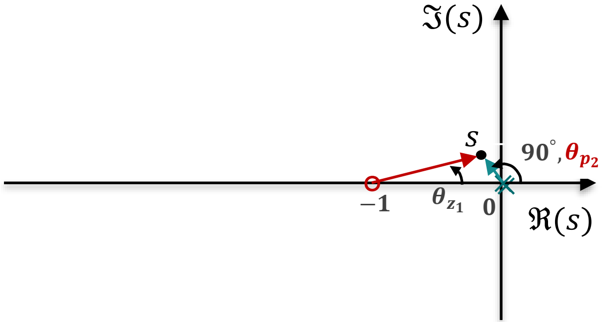


$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

❑ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را با محور حقیقی بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{s+2}{s^3} = 0 \rightarrow s = -2,$$



زاویه خروج از قطب $s = 0$ را به دست می آوریم:

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2}) = (2k+1)\pi$$

$$0^\circ - (90^\circ + \theta_{p_2}) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{p_2} = 90^\circ$$

ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

- **ادامه مثال ا:**

محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

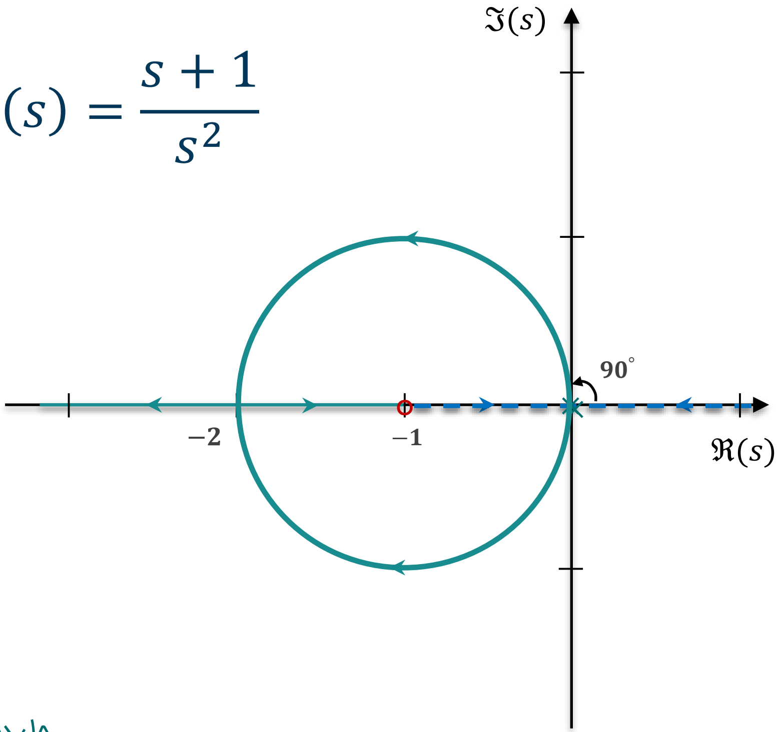
تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

زاویه خروج از قطبهای موهومی

رسم RL

رسم CRL

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$



حل دستی

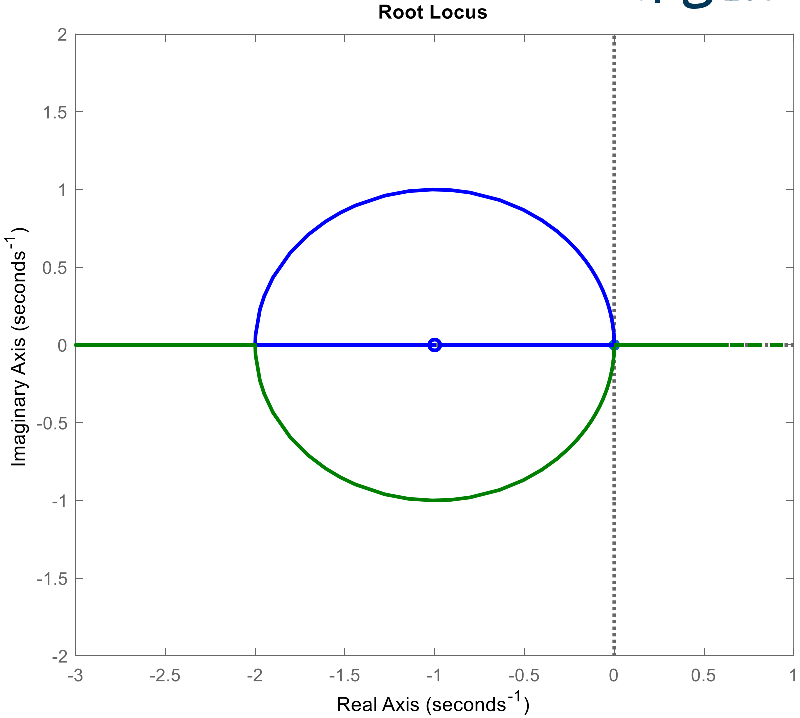
ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

- ادامه مثال ۱:

حل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

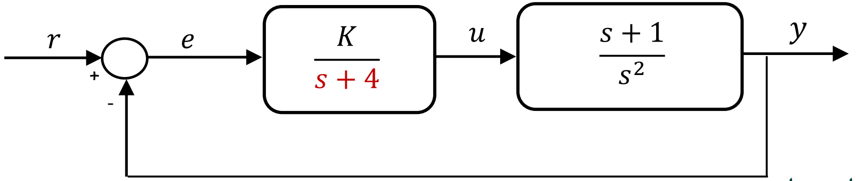
```
%   Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 1];
den=[1 0 0];
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type'
,'line'),'linewidth',2)
hold off
```



کد: rlocus_examples.m

مثال های کاربردی

- **مثال ۲: اضافه کردن یک قطب نزدیک مبدا:**



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

❑ سه شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K = 0 \rightarrow s = 0,\ s = 0, s = -4 \qquad K = \pm\infty,\ s = -1,\ \ 2\text{ branch} \rightarrow \infty$$

تنها نسبت به محور حقیقی تقارن وجود دارد

تعداد و مشخصات مجانب ها

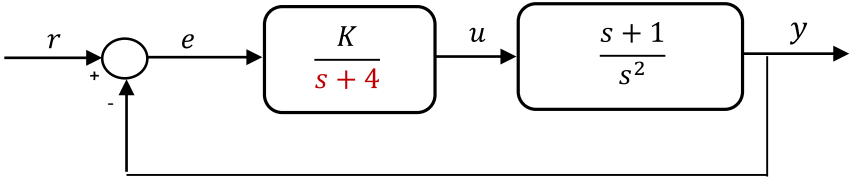
❑ با توجه به اینکه $n - m = 2$ دو مجانب در RL و دو مجانب در CRL وجود دارد که در امتداد محور حقیقی است

$$\text{For } k > 0 \ \rightarrow \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \\ \theta_1 = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ \end{cases} \qquad \text{For } k < 0 \ \rightarrow \theta_k = \frac{2k\pi}{2} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{0}{2} = 0^\circ \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2} = 180^\circ \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{\big(0 + 0 + (-4)\big) - (-1)}{2} = -\frac{3}{2}$$

مثال های کاربردی

- **ادامه مثال ۲:**



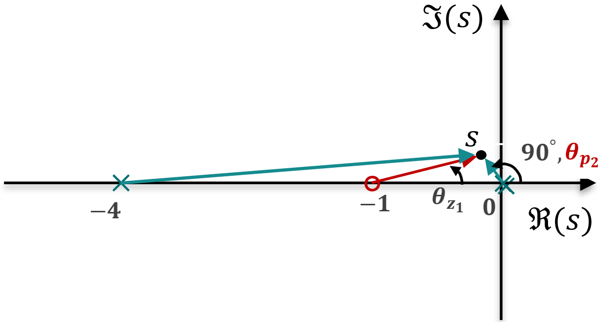
$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}$$

تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

- ❑ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را با محور حقیقی بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{2s^2+7s+8}{s^3(s+4)^2} = 0 \;\rightarrow s_{1,2} = -1.75 \pm j0.97,$$

- ❑ با توجه به موهومی بودن پاسخ غیر قابل قبول است.
- ❑ زاویه خروج از قطب $s = 0$ را به دست می آوریم:



$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = (2k+1)\pi$$

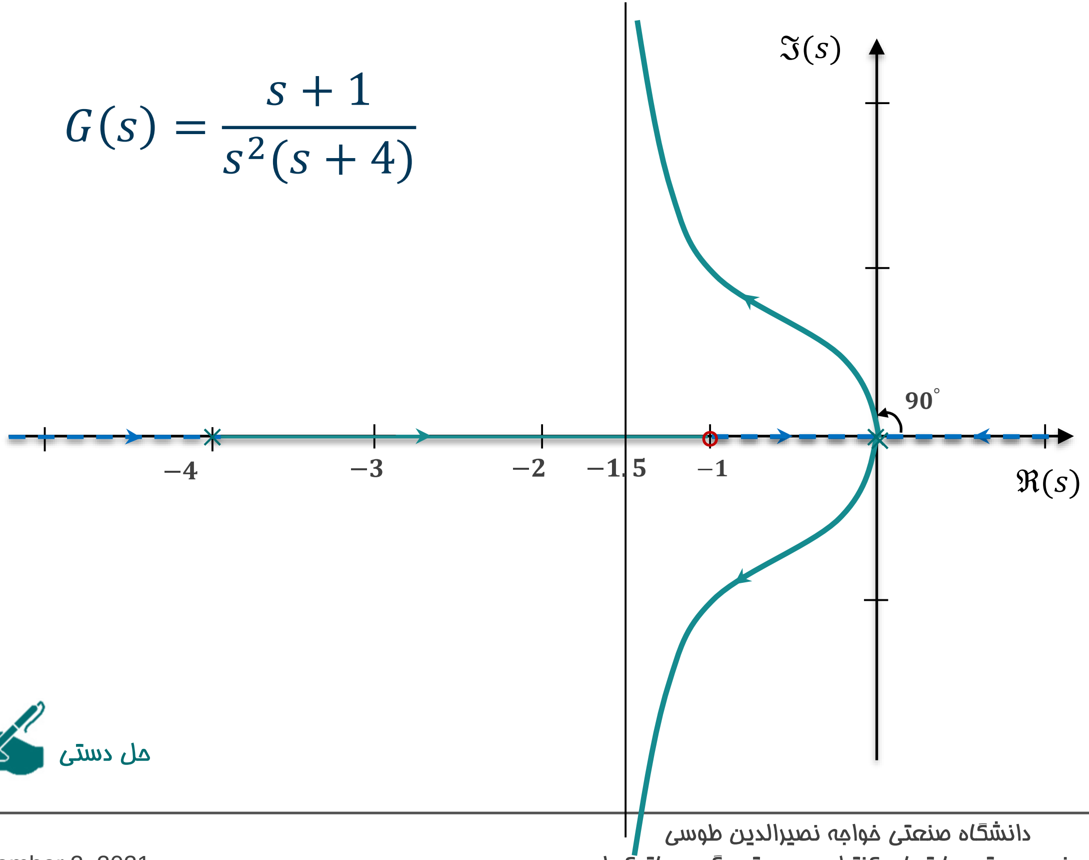
$$0^{\circ} - (90^{\circ} + \theta_{p_2} + 0) = 180^{\circ}$$

$$\rightarrow \theta_{p_2} = 90^{\circ}$$

ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

- **ادامه مثال ۲:**

$$G(s)=\frac{s+1}{s^2(s+4)}$$



محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

مجانب ها

زاویه خروج از قطب های بر روی مبدا

رسم RL

رسم CRL

حل دستی

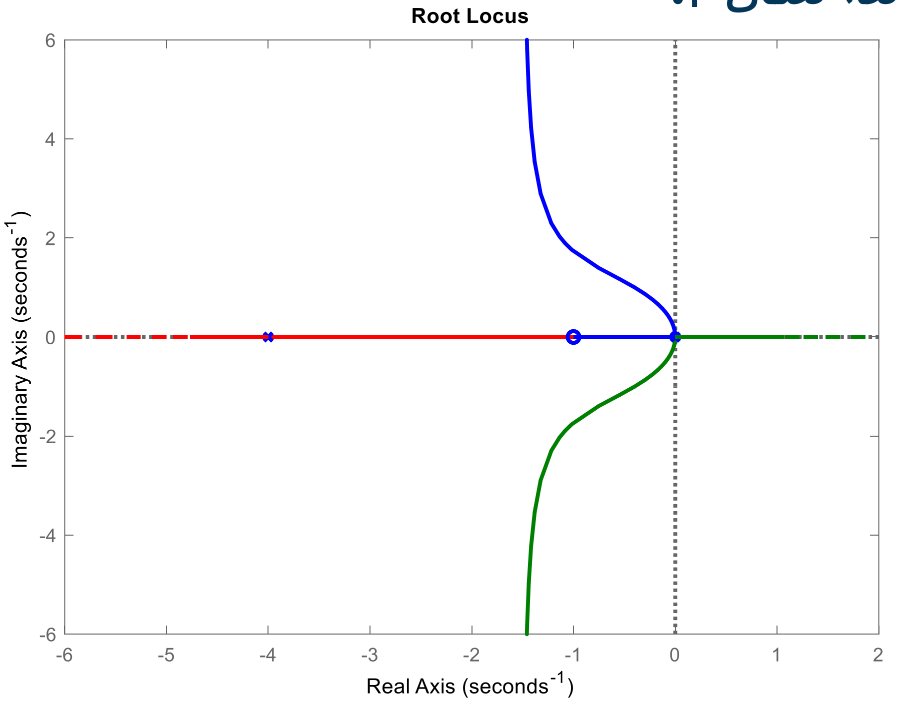
ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

- ادامه مثال ۲:

حل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}$$

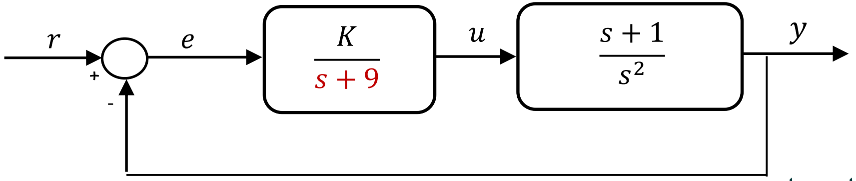
```
%   Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 1];
den=[1 4 0 0];
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type'
,'line'),'linewidth',2)
hold off
```



کد: rlocus_examples.m

مثال های کاربردی

- **مثال ۳: دور کردن قطب از مبدا:**



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

- ❑ سه شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K = 0 \rightarrow s = 0,\ s = 0, s = -9 \qquad K = \pm\infty,\ s = -1,\ \ 2\ \text{branch} \rightarrow \infty$$

تنها نسبت به محور حقیقی تقارن وجود دارد

تعداد و مشخصات مجانب ها

- ❑ مثل قبل

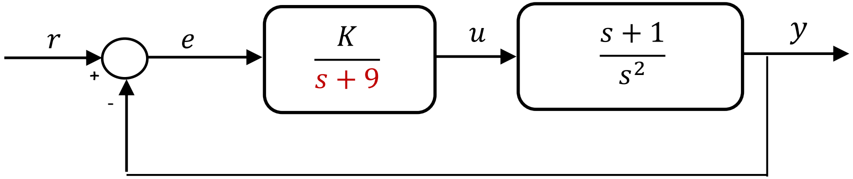
$$\text{For } k > 0 \rightarrow \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \\ \theta_1 = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ \end{cases} \qquad \text{For } k < 0 \rightarrow \begin{cases} \theta_0 = \frac{0}{2} = 0^\circ \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2} = 180^\circ \end{cases}$$

با این تفاوت که

$$\sigma = \frac{(0+0+(-9))-(-1)}{2} = -4$$

مثال های کاربردی

- **ادامه مثال ۲:**



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$

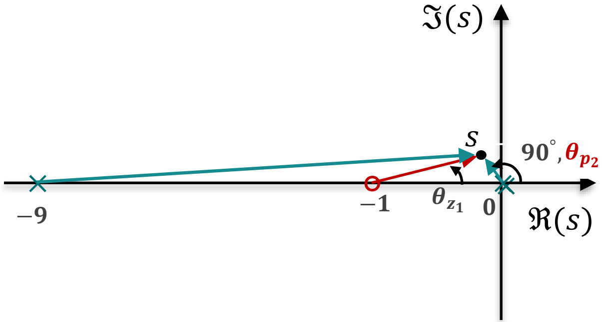
تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

❑ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را با محور حقیقی بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{2(s+3)^2}{s^3(s+4)^2} = 0 \;\rightarrow\; s_{1,2} = -3,$$

❑ با توجه به حقیقی شدن پاسخ قابل قبول است.

❑ زاویه خروج از قطب $s = 0$ نیز تغییری نکرده است.



$$\theta_{z_1} - \left(\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}\right) = (2k+1)\pi$$

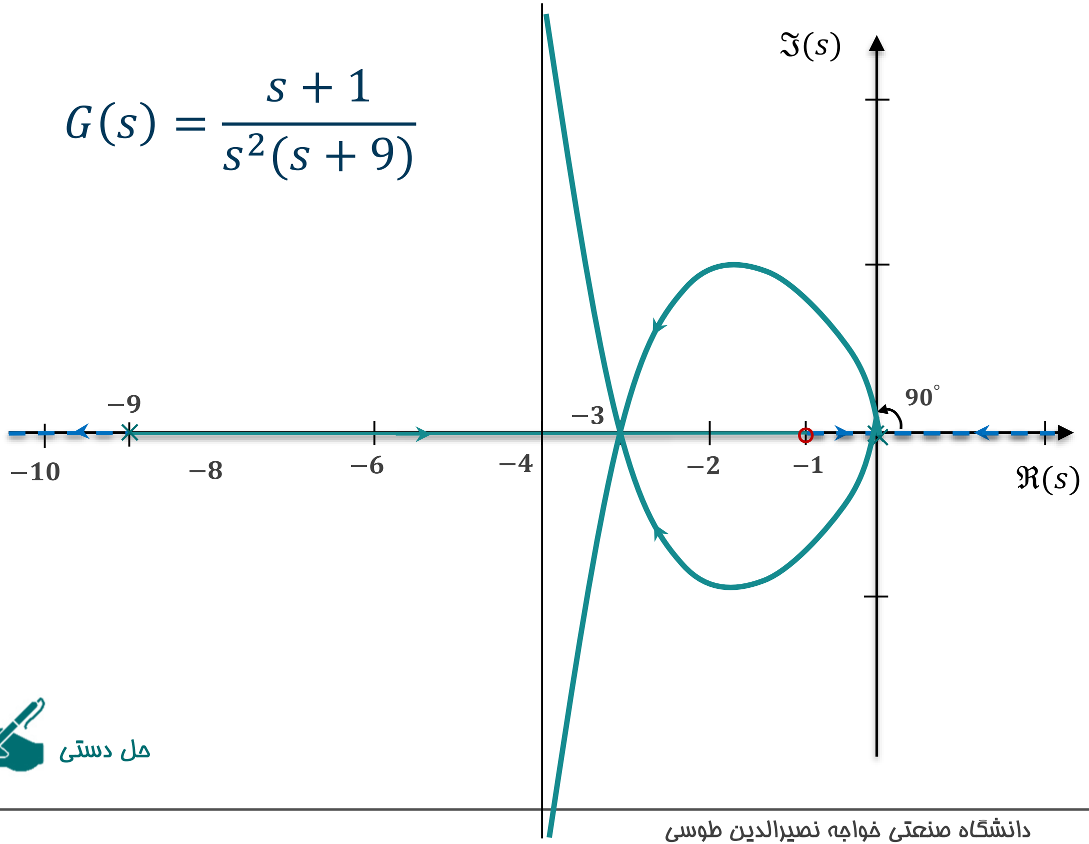
$$0^\circ - \left(90^\circ + \theta_{p_2} + 0\right) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{p_2} = 90^\circ$$

ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

- **ادامه مثال ۳:**

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$



محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

مجانب ها

محل برخورد با محور حقیقی

زاویه خروج از قطب های بر روی مبدا

رسم RL

رسم CRL

حل دستی

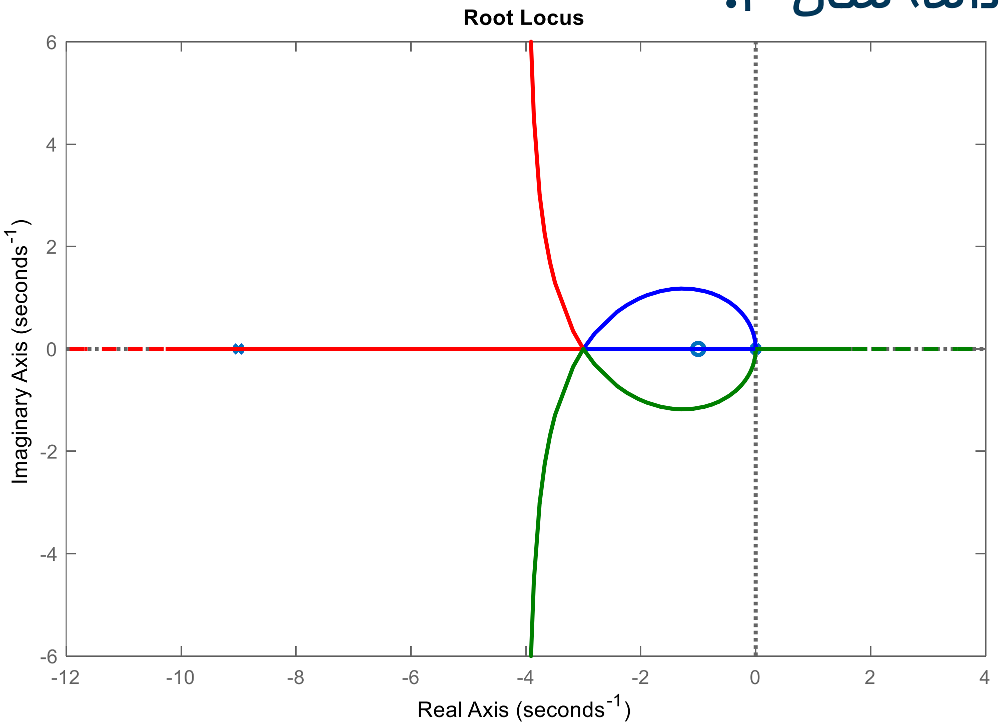
ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

- ادامه مثال ۳:

حل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$

```
%   Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 1];
den=[1 9 0 0];
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type'
,'line'),'linewidth',2)
hold off
```



کد: rlocus_examples.m

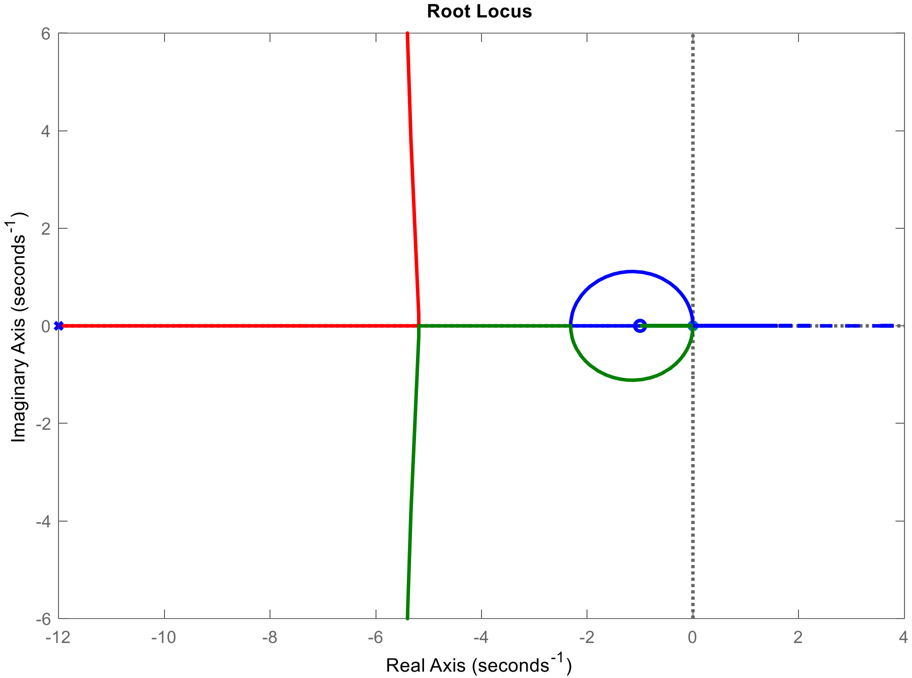
ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

- ادامه مثال ۳: بیشتر دور کردن قطب از مبدا

حل کامپیوتری

$$G(s)=\frac{s+1}{s^2(s+12)}$$

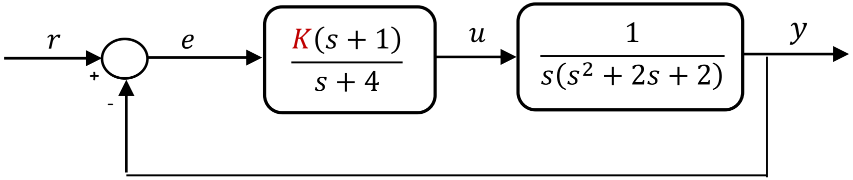
```
%   Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 1];
den=[1 12 0 0];
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type'
,'line'),'linewidth',2)
hold off
```



کد: rlocus_examples.m

مثال های کاربردی

- **مثال ۴: سیستم مرتبه چهار زیر را در نظر بگیرید:**



$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

❑ چهار شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K = 0 \rightarrow s = 0,\ s = -4,\ s = -1 \pm j1 \qquad K = \pm\infty,\ s = -1,\ 3 \text{ branches} \rightarrow \infty$$

تنها نسبت به محور حقیقی تقارن وجود دارد

تعداد و مشخصات مجانب ها

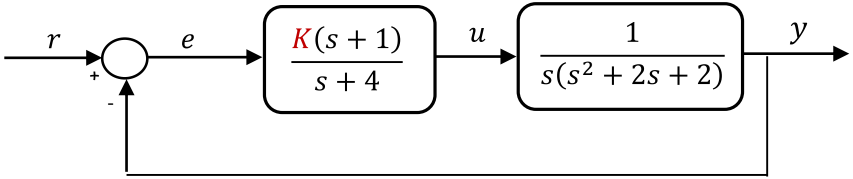
❑ با توجه به اینکه $n - m = 3$ سه مجانب در RL و سه مجانب در CRL وجود دارد

$$\text{For } k > 0 \rightarrow \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \\ \theta_1 = \frac{3\pi}{3} = 180^\circ \\ \theta_2 = \frac{5\pi}{3} = 300^\circ \end{cases} \qquad \text{For } k < 0 \rightarrow \theta_k = \frac{2k\pi}{3} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{3} = 0^\circ \\ \theta_1 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \\ \theta_2 = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{\big(0 + (-4) + (-1+j) + (-1-j)\big) - (-1)}{3} = -\frac{5}{3}$$

مثال های کاربردی

- **ادامه مثال ۴:**



$$G(s)=\frac{s+1}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

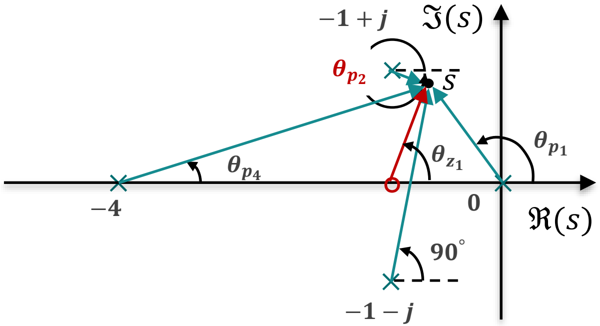
تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

❑ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را با محور حقیقی بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds}=-\frac{3s^4+16s^3+28s^2+20s+8}{s^2(s^3+6s^2+10s+8)^2}=0\ \rightarrow s_1=-2,\ \ s_2=-2.47,\ s_{3,4}=-0.43\pm j0.6$$

❑ هر دو جواب حقیقی قابل قبول است.

زاویه خروج از قطب $s=-1+j$ را به دست می آوریم:

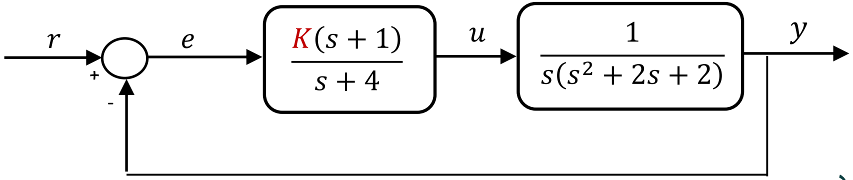


$$\theta_{z_1}-\left(\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3}\right)=(2k+1)\pi$$

$$90^\circ-\left(135^\circ+\theta_{p_2}+90^\circ+18.43\right)=180^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{p_2}=26.6^\circ$$

مثال های کاربردی



- **ادامه مثال ۴:**
  - ✓ محل تلاقی با محور موهومی
    - ❑ با استفاده از معیار راث می توان حالت نوسانات دائمی و محل برخورد با محور $j\omega$ را تعیین نمود

معادله مشخصه سیستم: $\Delta(s) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (1+K)s + (1+K)$

جدول راث را به دست بیاورید:

$\Delta(s) = F(s) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (1+K)s + (1+k) = 0$

s^4	1	10	$1+K$
s^3	6	$1+K$	0
s^2	$\frac{60-1-K}{6} = 9.83 - 0.167K$	$1+K$	0
s^1	$(1+K)(3.83-0.167K)/A$	0	0
s^0	$1+K$	0	0

شرایط پایداری:

$$1 + K > 0 \rightarrow K > -1$$

$$9.83 - 0.167K > 0 \rightarrow K < 58.63$$

$$3.83 - 0.167K > 0 \rightarrow K < 22.93$$

- ❑ محدوده پایداری: $-1 < K < 22.93$
- ❑ به ازای $K = 22.93$ معادله کمکی:

$$A(s) = 6s^2 + 23.93 = 0$$

$$s = \pm j\,1.99$$

ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

- ## ادامه مثال ۴:

محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

مجانب ها

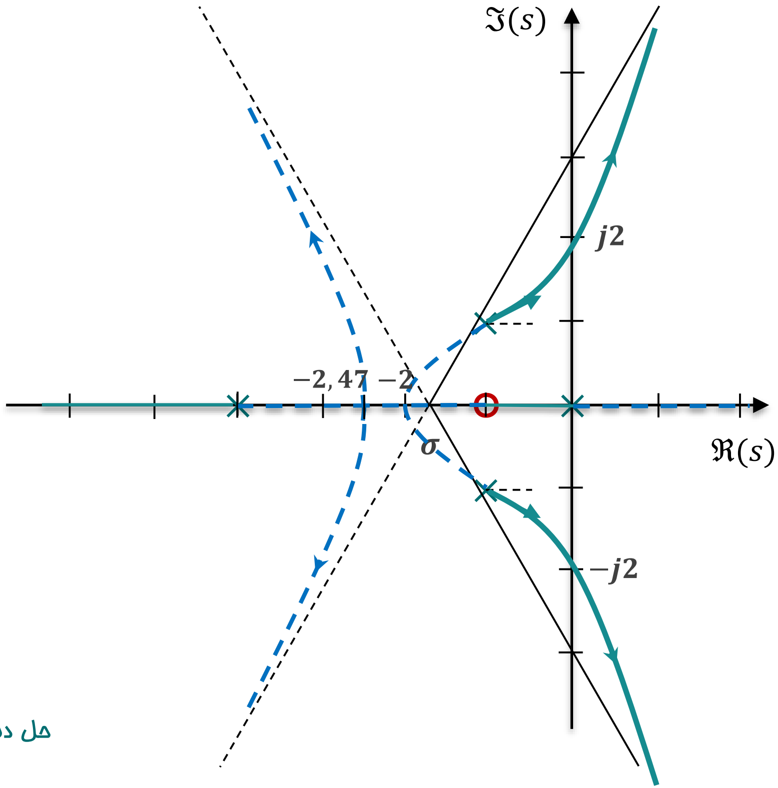
تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

زاویه خروج از قطب های موهومی

تقاطع با محور موهومی

رسم RL

رسم CRL



حل دستی

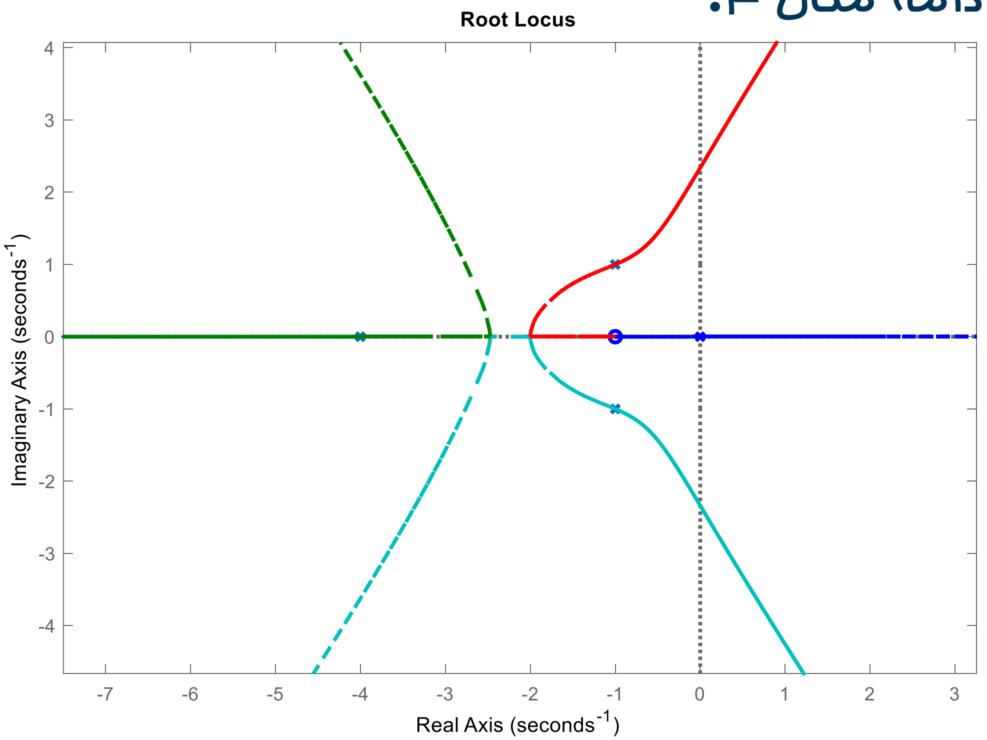
ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

- ادامه مثال ۴:

حل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

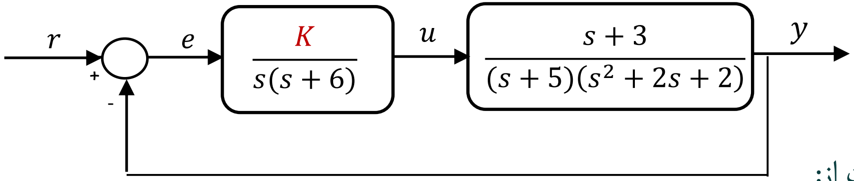
```
%   Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 1];
den=conv([1 4 0],[1 2 2]);
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type'
,'line'),'linewidth',2)
hold off
```



کد: rlocus_examples.m

مثال های کاربردی

- مثال ۵: سیستم مرتبه پنج زیر را در نظر بگیرید:



$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

❑ پنج شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$K=0 \to s=0,\ s=-5,\ s=-6,\ s=-1\pm j1 \qquad K=\pm\infty,\ s=-3,\ \ 4 \text{ branches} \to \infty$

تنها نسبت به محور حقیقی تقارن وجود دارد

تعداد و مشخصات مجانب ها

❑ با توجه به اینکه $n-m=4$ چهار مجانب در RL و چهار مجانب در CRL وجود دارد

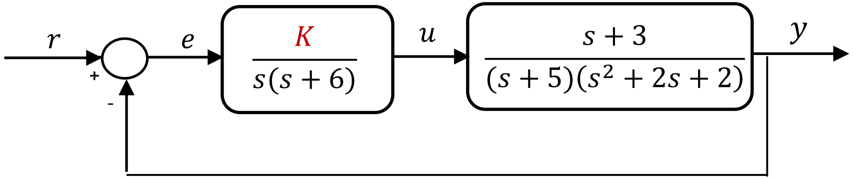
For $k>0 \ \to \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \begin{cases} \theta_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4} = \pm 45^\circ \\ \theta_{3,4} = \pm\frac{3\pi}{4} = \pm 135^\circ \end{cases}$

For $k<0 \ \to \theta_k = \frac{2k\pi}{4} = \begin{cases} \theta_0 = \frac{0\pi}{4} = 0^\circ, \theta_1 = \frac{2\pi}{4} = 90^\circ \\ \theta_2 = \frac{4\pi}{4} = 180^\circ, \theta_3 = \frac{6\pi}{4} = 270^\circ \end{cases}$

$$\sigma = \frac{\big(0-5-6+(-1+j)+(-1-j)\big)-(3)}{4} = -\frac{5}{2}$$

مثال های کاربردی

- ادامه مثال ۵:



$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

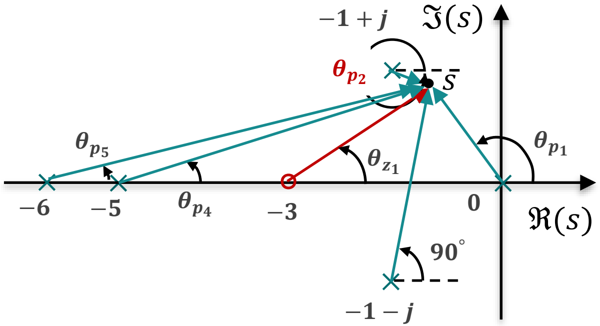
تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

- ❑ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را با محور حقیقی بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -2\frac{2s^5+27s^4+132s^3+284s^2+246s+90}{s^2(s^4+13s^3+54s^2+82s+60)^\wedge 2} = 0$$

$$\rightarrow s_1 = -5.526, s_{2,3} = -3.33 \pm j1.2, s_{4,5} = -0.66 \pm j0.47$$

- ❑ جواب حقیقی قابل قبول است.



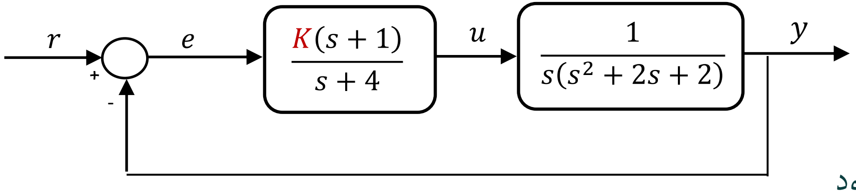
زاویه خروج از قطب $s = -1 + j$ را به دست می آوریم:

$$\theta_{z_1} - \left(\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3} + \theta_{p_4} + \theta_{p_5}\right) = (2k+1)\pi$$

$$90^\circ - \left(135^\circ + \theta_{p_2} + 90^\circ + 14^\circ + 11.4^\circ\right) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{p_2} = -43.8^\circ$$

- **ادامه مثال ۵:**



✓ محل تلاقی با محور موهومی

❑ با استفاده از معیار راث می توان حالت نوسانات دائمی و محل برخورد با محور $j\omega$ را تعیین نمود

معادله مشخصه سیستم: $\Delta(s) = s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60+K)s + 3K = 0$

جدول راث را به دست بیاورید:

$\Delta(s) = s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60+K)s + 3K = 0$			
s^5	1	54	$60+K$
s^4	13	82	$3K$
s^3	47.7	$0.796K$	0
s^2	$A = 65.6 - 0.212K$	$3K$	0
s^1	$3940 - 105K - 0.1363K^2/A$	0	0
s^0	$3K$	0	0

شرایط پایداری:

$$3K > 0 \rightarrow K > 0$$

$$65.6 - 0.212K > 0 \rightarrow K < 309$$

$$3940 - 105K - 0.1363K^2 > 0 \rightarrow K < 35$$

محدوده پایداری: $0 < K < 35$

❑ به ازای $K = 35$ معادله کمکی:

$$A(s) = 58.2s^2 + 105 = 0$$

$$s = \pm j\,1.34$$

ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

$$G(s)=\frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

- **ادامه مثال ۵:**

محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

مجانب ها

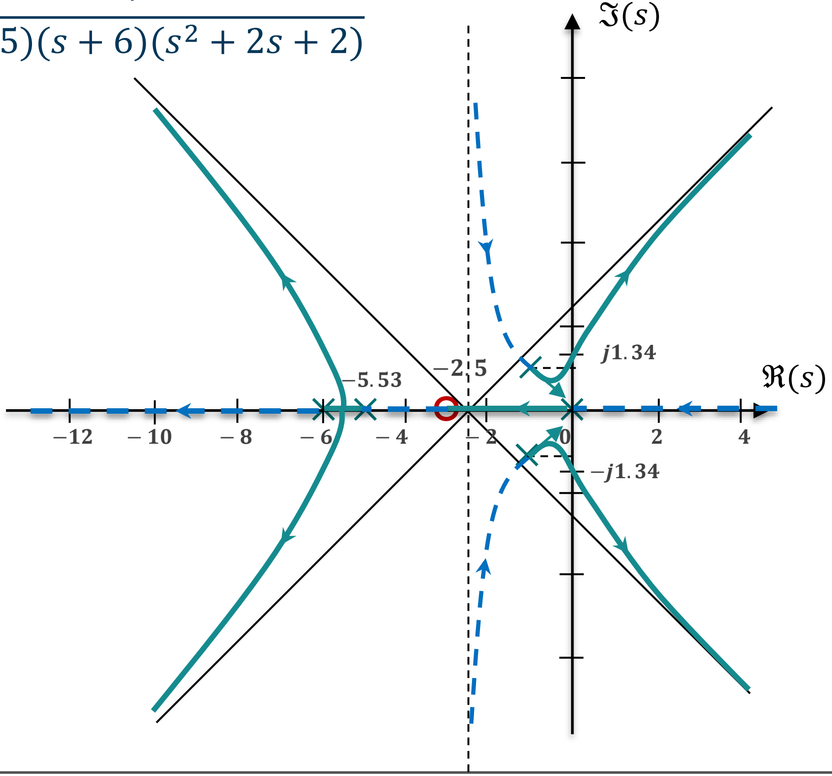
تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

زاویه خروج از قطب های موهومی

تقاطع با محور موهومی

رسم RL

رسم CRL



حل دستی

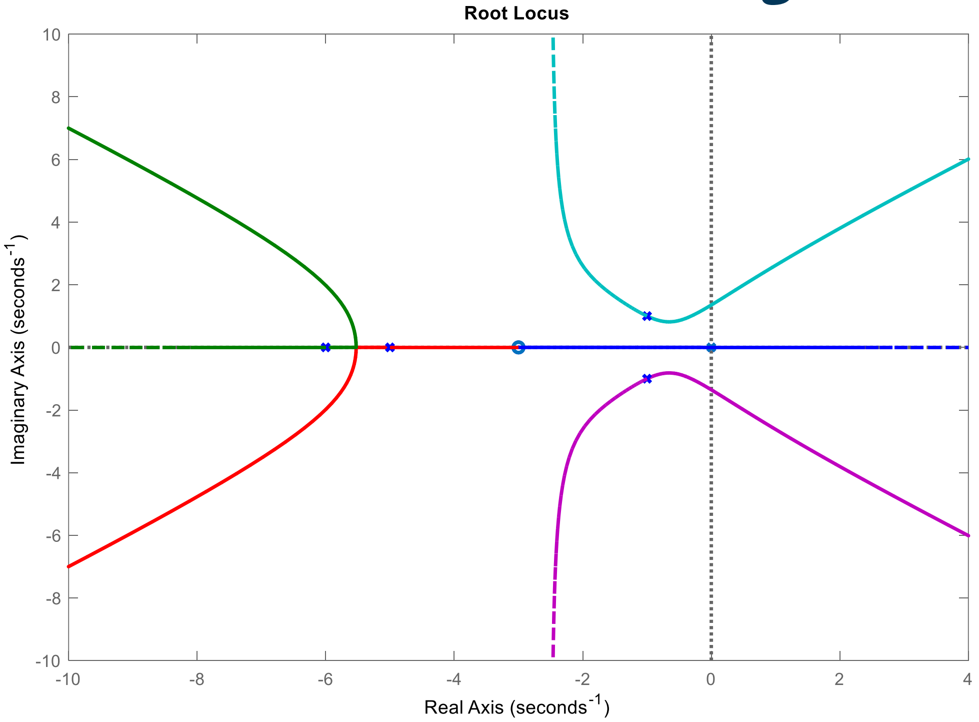
ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

- ادامه مثال ۵:

حل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

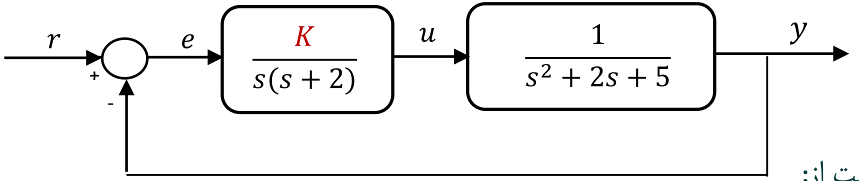
```
%   Example 1
clear all, clc, clf
num=[1 3];
den=conv([1 11 30 0],[1 2 2]);
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type','
line'),'linewidth',2)
hold off
```



کد: rlocus_examples.m

مثال های کاربردی

- مثال ۶: سیستم مرتبه چهار زیر را در نظر بگیرید:



$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$

نقاط ابتدا و انتهایی و تعداد شاخه ها:

❑ چهار شاخه وجود دارد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن عبارت است از:

$$K=0\rightarrow s=2,\ s=-1\pm j2 \qquad K=\pm\infty,\ \ 4\ \text{branches}\rightarrow\infty$$

نسبت به محور حقیقی و محور $s=-1$ تقارن وجود دارد

تعداد و مشخصات مجانب ها

❑ با توجه به اینکه $n-m=4$ چهار مجانب در RL و چهار مجانب در CRL وجود دارد

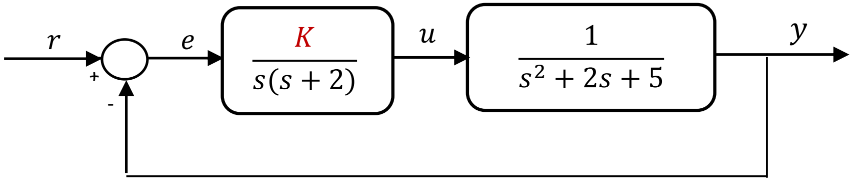
$$\text{For } k>0 \rightarrow \theta_k=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\begin{cases}\theta_{1,2}=\pm\frac{\pi}{4}=\pm 45^{\circ}\\ \theta_{3,4}=\pm\frac{3\pi}{4}=\pm 135^{\circ}\end{cases}$$

$$\text{For } k<0 \rightarrow \theta_k=\frac{2k\pi}{4}=\begin{cases}\theta_0=\frac{0\pi}{4}=0^{\circ},\theta_1=\frac{2\pi}{4}=90^{\circ}\\ \theta_2=\frac{4\pi}{4}=180^{\circ},\theta_3=\frac{6\pi}{4}=270^{\circ}\end{cases}$$

$$\sigma=\frac{\big(0-2+(-1+2j)+(-1-2j)\big)-(0)}{4}=-\frac{4}{4}=-1$$

مثال های کاربردی

- **ادامه مثال ۶:**



$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$

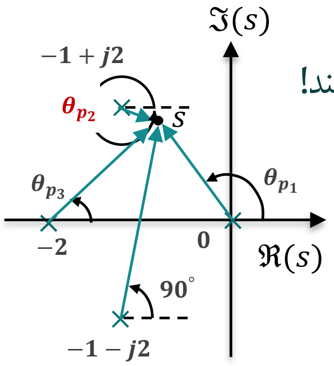
تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

- ❑ با توجه به وجود مجانب محل تقاطع شاخه ها را بررسی می کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -2\frac{2s^3+6s^2+9s+5}{s^2(s^4+13s^3+54s^2+82s+60)\text{^}2} = 0$$

$$\rightarrow s_1 = -1, s_{2,3} = -1 \pm j1.22,$$

- ❑ هر سه جواب در معادله $1 + KG(s) = 0$ صدق کرده و قابل قبول هستند!



زاویه خروج از قطب $s = -1 + j2$ را به دست می آوریم:

$$-(\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = (2k+1)\pi$$

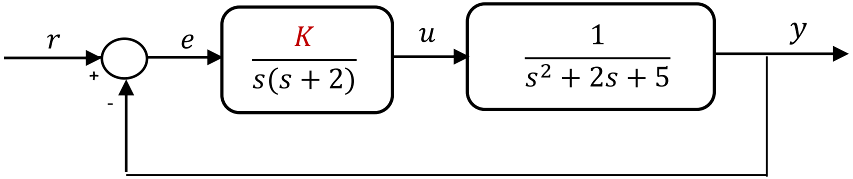
$$-(116.6^\circ + \theta_{p_2} + 90^\circ + 63.4^\circ) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{p_2} = -90^\circ$$

مثال های کاربردی

• ادامه مثال ۶:

✓ محل تلاقی با محور موهومی



❑ با استفاده از معیار راث می توان حالت نوسانات دائمی و محل برخورد با محور $j\omega$ را تعیین نمود

معادله مشخصه سیستم: $\Delta(s) = s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 105 + K = 0$

جدول راث را به دست بیاورید:

$\Delta(s) = s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 105 + K = 0$			
s^4	1	9	K
s^3	4	105	0
s^2	6.5	K	0
s^1	$65 - 4K/6.5$	0	0
s^0	K	0	0

شرایط پایداری:

$$K > 0$$

$$65 - 4K > 0 \rightarrow K < 16.25$$

محدوده پایداری: $0 < K < 16.25$

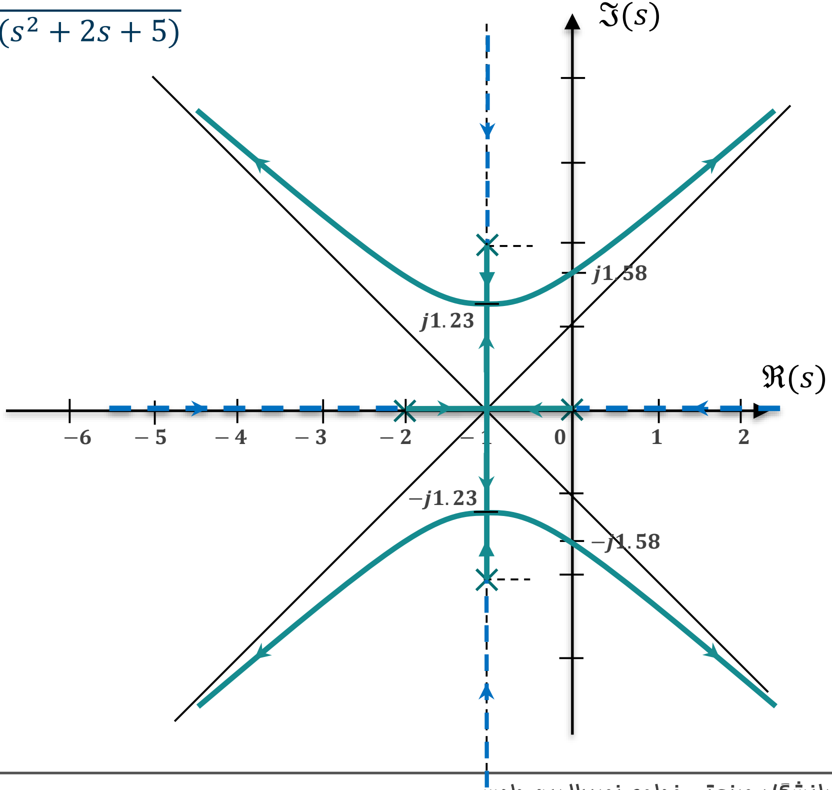
❑ به ازای $K = 16.25$ معادله کمکی:

$$A(s) = 6.5s^2 + 16.25 = 0$$

$$s = \pm j\ 1.58$$

ترسیم گام به گام مکان هندسی ریشه ها

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$



- **ادامه مثال ۶:**

محل قطب ها و صفر ها

محور حقیقی

مجانب ها

تقاطع شاخه ها با محور حقیقی

زاویه خروج از قطب های موهومی

تقاطع با محور موهومی

رسم RL

رسم CRL

حل دستی

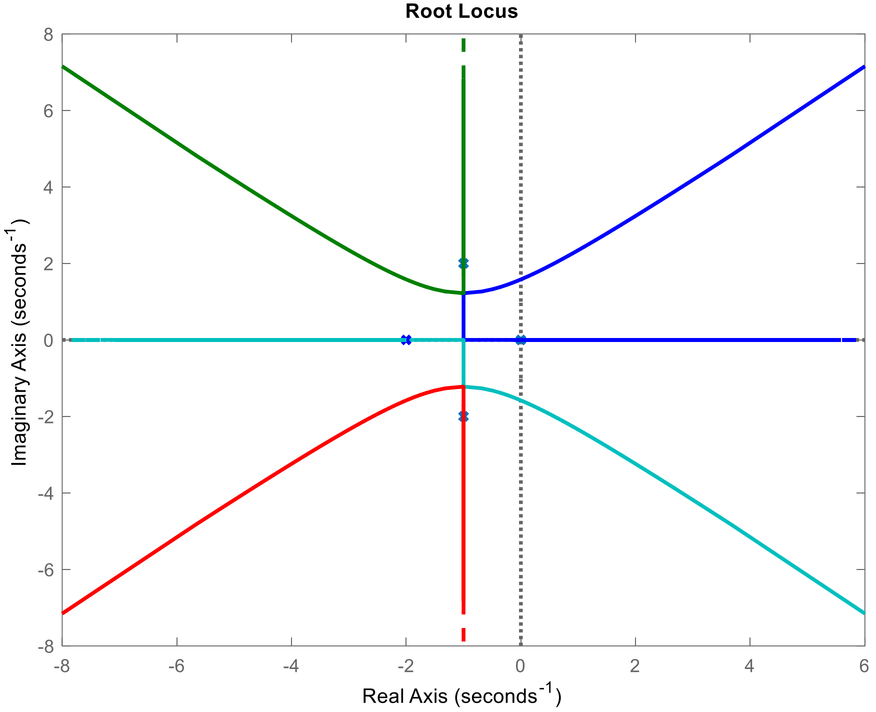
ترسیم مکان هندسی ریشه ها در Matlab

- ادامه مثال ۶:

حل کامپیوتری

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$

```
%   Example 6
clear all, clc, clf
num=1;
den=conv([1 2 0],[1 2 5]);
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
hold on
rlocus(-sys,'--')
set(findall(figure(1),'type','
line'),'linewidth',2)
hold off
```



کد: rlocus_examples.m

عناوین فصل

مقدمه

۱ چرا مکان هندسی ریشه ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، شرایط اندازه و زاویه، روش هندسی نمایش شرایط اندازه و زاویه

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

۲ نقاط ابتدا و انتهایی، تعداد شاخه ها، تقارن مکان، مجانب ها، نقاط روی محور حقیقی، نقاط تقاطع شاخه ها با محور حقیقی و موهومی و زاویه ورود یا خروج از قطب و صفر

مثال های کاربردی

۳ روش گام به گام ترسیم دستی، روش کامپیوتری، سیستم درجه دو، اضافه کردن یک قطب نزدیک، دورکردن قطب از مبدا، سیستم مرتبه چهار و پنج، تقارن حول محور عمودی

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

۴ تعیین بهره حلقه به صورت دستی و کامپیوتری از روی مکان هندسی ریشه ها، اضافه کردن یک یا دو قطب پایدار به سیستم، اضافه کردن یک یا دو صفر سمت چپ به سیستم.

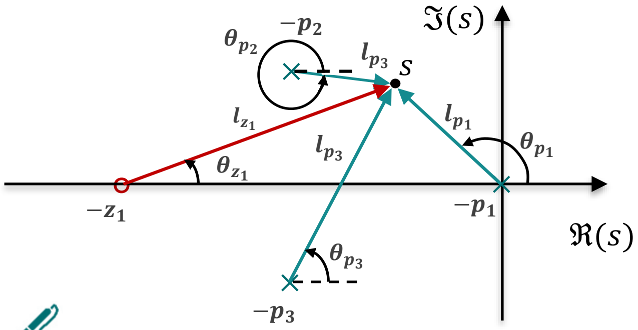
طراحی سیستم کنترل توسط مکان

۵ کنترلگر بهره ثابت، جبران ساز های دینامیکی، معرفی چند کنترلگر کاربردی، طراحی کنترلگر PD، Lead، Lag و Lead-Lag، تحلیل مسائل ابتکاری

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازی و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربری متنوع روش ترسم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلگر های کاربردی، P، PD، Lead، Lag و Lead-Lag خواهیم پرداخت.

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

- ## تعیین بهره K بر روی مکان هندسی ریشه ها



✓ شرط اندازه برای کلیه نقاط مکان هندسی بر قرار است:

❑ شرط اندازه: $\frac{\prod_{i=1}^{n} l_{p_i}}{\prod_{i=1}^{m} l_{z_i}} = |K|$

❑ در نتیجه با اندازه گیری حاصل ضرب طول بردار های آبی به حاصل ضرب طول بردار های قرمز رنگ می توان اندازه بهره K را تعیین نمود.

حل دستی

✓ تعیین مشخصات نقاط مکان هندسی ریشه ها به صورت کامپیوتری

❑ از دستور `[K,poles]=rlocfind(sys)` در نرم افزار Matlab استفاده کنید.

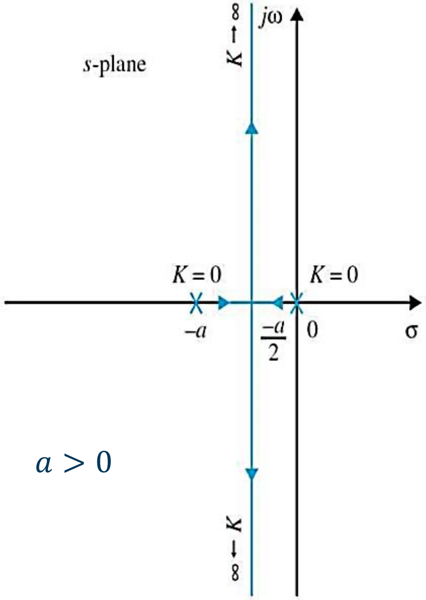
❑ از راست کلیک بر روی نقاط مکان ترسیم شده استفاده کنید.

حل کامپیوتری

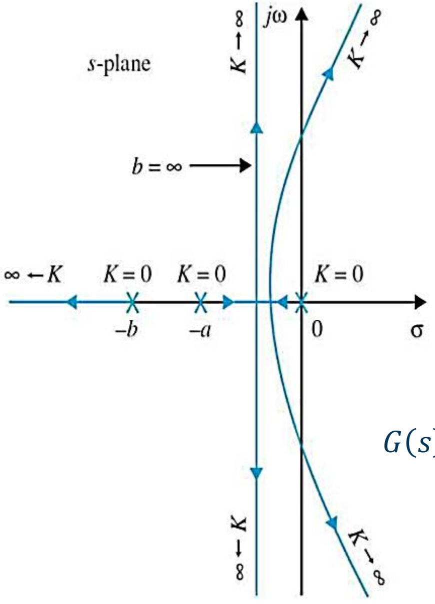
ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

- **اضافه کردن قطب یا صفر به سیستم**

✓ تاثیر اضافه کردن یک قطب پایدار: مکان را به سمت نیم صفحه سمت راست دفع می کند.



$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)}, \qquad a > 0$$



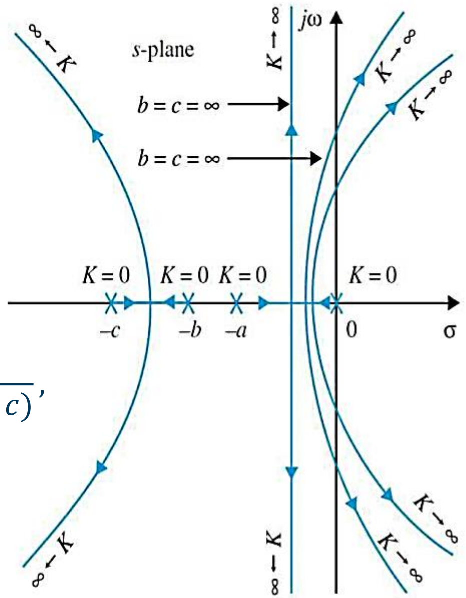
$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)}, \qquad b > a > 0$$

برگرفته از کتاب Kou

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

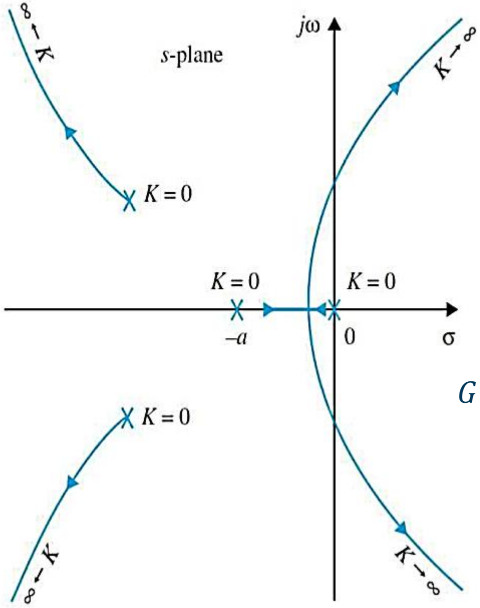
- **اضافه کردن قطب یا صفر به سیستم**

✓ تاثیر اضافه کردن دو قطب پایدار: مکان را بیشتر به سمت نیم صفحه سمت راست دفع می کند.



$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)(s+c)},$$

$$c > b > a > 0$$



$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+\sigma \pm j\omega)},$$

$$\sigma > a > 0$$

برگرفته از کتاب Kou

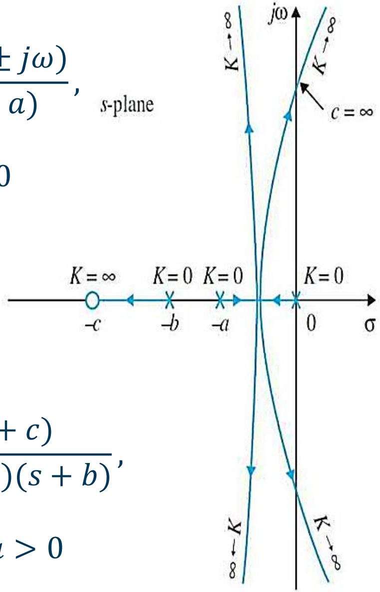
ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

- **اضافه کردن قطب یا صفر به سیستم**

✓ تاثیر اضافه کردن یک صفر درOLHP: مکان را به سمت نیم سمت چپ جذب می کند.

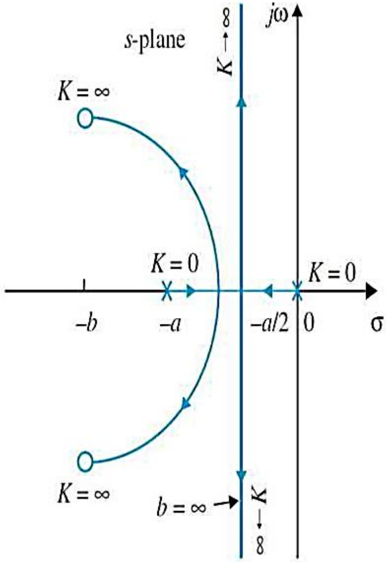
$$G(s) = \frac{(s+b \pm j\omega)}{s(s+a)},$$

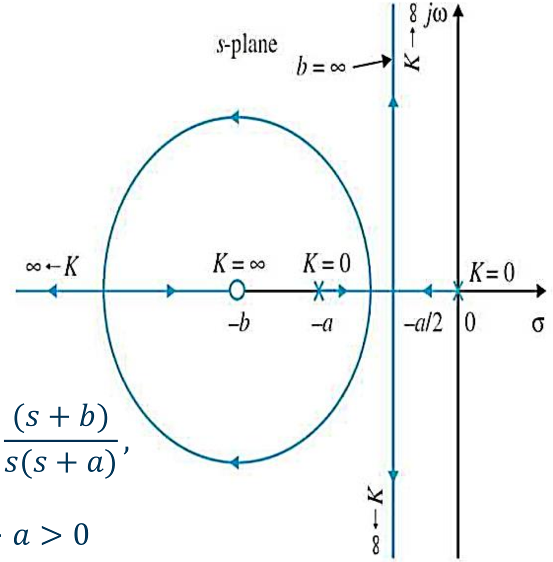
$$b > a > 0$$



$$G(s) = \frac{(s+c)}{s(s+a)(s+b)},$$

$$c > b > a > 0$$





$$G(s) = \frac{(s+b)}{s(s+a)},$$

$$b > a > 0$$

برگرفته از کتاب Kou

عناوین فصل

مقدمه

۱ چرا مکان هندسی ریشه ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، شرایط اندازه و زاویه، روش هندسی نمایش شرایط اندازه و زاویه

قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها

۲ نقاط ابتدا و انتهایی، تعداد شاخه ها، تقارن مکان، مجانب ها، نقاط روی محور حقیقی، نقاط تقاطع شاخه ها با محور حقیقی و موهومی و زاویه ورود یا خروج از قطب و صفر

مثال های کاربردی

۳ روش گام به گام ترسیم دستی، روش کامپیوتری، سیستم درجه دو، اضافه کردن یک قطب نزدیک، دورکردن قطب از مبدا، سیستم مرتبه چهار و پنج، تقارن حول محور عمودی

ویژگی های مکان هندسی ریشه ها

۴ تعیین بهره حلقه به صورت دستی و کامپیوتری از روی مکان هندسی ریشه ها، اضافه کردن یک یا دو قطب پایدار به سیستم، اضافه کردن یک یا دو صفر سمت چپ به سیستم.

طراحی سیستم کنترل توسط مکان

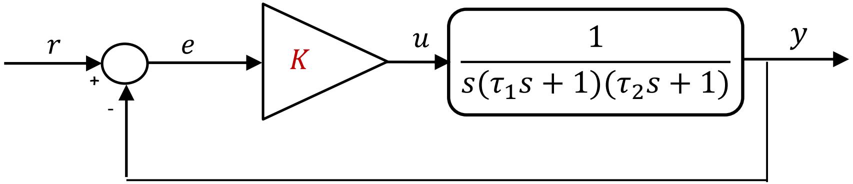
۵ کنترلگر بهره ثابت، جبران ساز های دینامیکی، معرفی چند کنترلگر کاربردی، طراحی کنترلگر PD، Lead، Lag و Lead-Lag، تحلیل مسائل ابتکاری

در این فصل با چندین روش مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل آشنا می شویم. در ابتدا انگیزه استفاده از این روش و شرایط اندازی و زاویه را مرور می کنیم. سپس قوانین ترسیم مکان هندسی ریشه ها را بیان نموده و با ارائه مثالهای کاربری متنوع روش ترسم دستی و کامپیوتری مکان هندسی ریشه ها را تمرین خواهیم کرد، ویژگی های مکان هندسی ریشه ها با اضافه نمودن صفر و قطب پایدار به سیستم را به صورت نمایشی تحلیل نموده و در پایان با استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها به طراحی کنترلگر های کاربردی، P، PD، Lead، Lag و Lead-Lag خواهیم پرداخت.

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلگر بهره ثابت

✓ ربات جراح لیزری را که با یک سیستم مرتبه سوم و کنترلگر بهره ثابت K مدل شده است را در نظر بگیرید:



✓ مطلوب است خطای ماندگار به ورودی شیب محدود بماند: $e_{ss} \geq 0.1\, mm$

✓ سیستم پایدار باشد: کلیه قطب های سیستم حلقه بسته در OLHP بماند

✓ نوسانات حرکتی زیادی نداشته باشد: $\zeta \geq \zeta_d = 0.707$

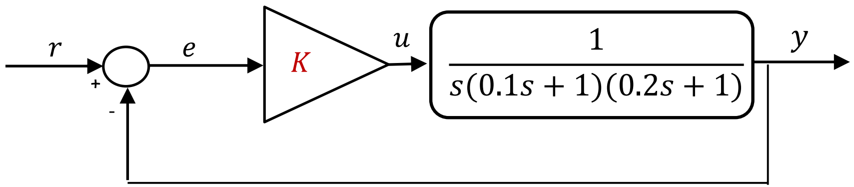
❑ ممکن است میزان معینی فراجهش یا زمان خیز و یا غیره مطلوب باشد که در این صورت $\zeta = \zeta_d$ تعیین می شود.

✓ ثابت های زمانی ربات را $\tau_1 = 0.1,\ \tau_2 = 0.2$ در نظر بگیرید

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلگر بهره ثابت

✓ ربات جراح لیزری:



✓ تحلیل خطای ماندگار به ورودی شیب واحد:

$$L(s) = KG(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

❑ ثابت سرعت:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{(0.1s+1)(0.2s+1)} = K$$

❑ شرط خطای ماندگار به ورودی شیب واحد:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} \leq 0.1 \quad \rightarrow \quad K \geq 10$$

✓ تحلیل پایداری و ضریب استهلاک

❑ پایداری و میزان استهلاک را با استفاده از مکان هندسی ریشه ها تحلیل می کنیم.

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلگر بهره ثابت

✓ تحلیل پایداری با استفاده از معیار راث–هرویتز

❑ معادله مشخصه سیستم:

$$\Delta(s) = s(0.1s+1)(0.2s+1)+K=0$$

$$\Delta(s) = 0.02s^3+0.3s^2+s+K = s^3+15s^2+50s+50K=0$$

$\Delta(s) = s^3+15s^2+50s+50K=0$		
s^3	1	50
s^2	15	$50K$
s^1	$(750-50K)/15$	0
s^0	$50K$	0

❑ شرایط پایداری

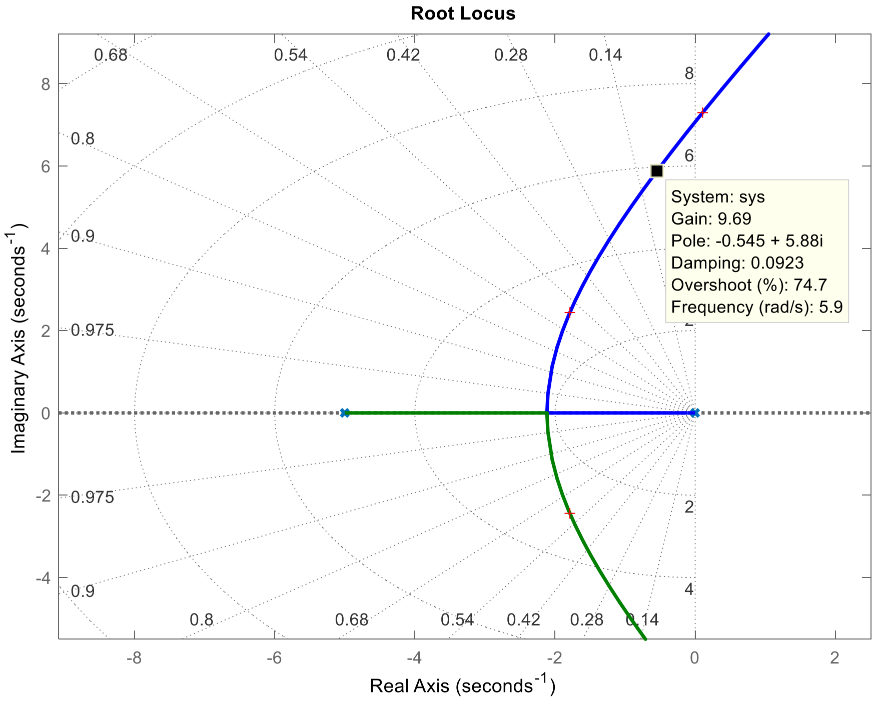
$$750-50K>0 \;\rightarrow\; K<15 \;\text{و}\; K>0$$

❑ محدوده پایداری

$$0<K<15$$

❑ با شرایط مطلوب خطای ماندگار همخوانی دارد

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها



• طراحی کنترلگر بهره ثابت

✓ تحلیل پایداری و ضریب استهلاک

❑ مکان هندسی را ترسیم می کنیم.

❑ اگر بخواهیم $\zeta \approx 0.7$ باشد:

$$K = 1.69$$

❑ با در نظر گرفتن $K \approx 10$:

$$\zeta \approx 0.1$$

✓ تناقض در مقادیر مطلوب دیده می شود

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

- **طراحی جبران سازهای دینامیکی**
  - ✓ در کنترلگر بهره ثابت تنها یک پارامتر طراحی $C(s) = K$ وجود دارد.
    - ❑ پس نمی توان چند هدف کنترلی را به صورت همزمان ارضا نمود.
- **معرفی چند کنترلگر یا جبران ساز کاربردی**
  - ✓ کنترلگر تناسبی : P

$$C(s) = K$$

  - ✓ کنترلگر تناسبی-مشتقی: PD

$$C(s) = K(T_d s + 1)$$

  - ✓ کنترلگر تناسبی-انتگرالی: PI

$$C(s) = K\left(\frac{1}{T_i s} + 1\right)$$

  - ✓ کنترلگر تناسبی-مشتقی-انتگرالی: PID

$$C(s) = K\left(T_d s + \frac{1}{T_i s} + 1\right)$$

برگرفته از کتاب Franklin

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

- معرفی چند کنترلگر کاربردی

✓ در کنترلگر PD یک صفر در نقطه $z_d = -\frac{1}{T_d}$ به کنترل تناسبی اضافه شده است.

✓ در کنترلگر PI یک قطب در مبدا و یک صفر در نقطه $z_i = -\frac{1}{T_i}$ به کنترل تناسبی اضافه شده است.

$$C(s) = K\left(\frac{1}{T_i s} + 1\right) = K\left(\frac{T_i s+1}{T_i s}\right)$$

✓ در کنترلگر PID یک قطب در مبدا و دو صفر به کنترل تناسبی اضافه شده است.

$$C(s) = K\left(\frac{T_d T_i s^2+T_i s+1}{T_i s}\right)$$

برگرفته از کتاب Franklin

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

- معرفی چند کنترلگر کاربردی

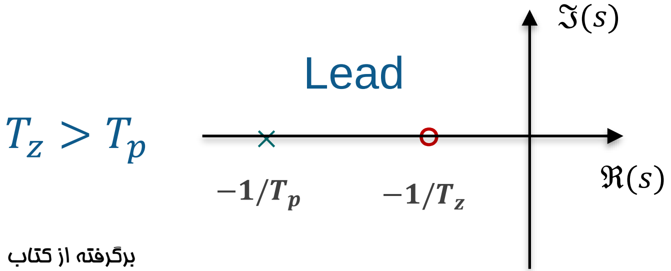
✓ کنترلگر پیش فاز Lead یا پس فاز Lag:

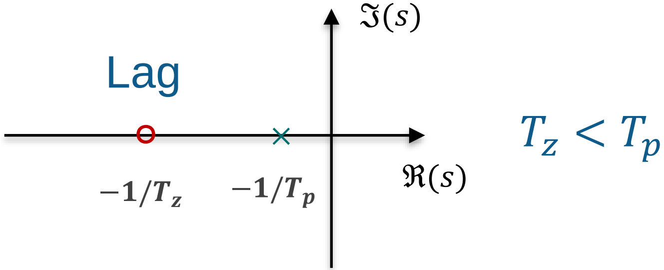
$$C(s) = K\left(\frac{T_z s+1}{T_p s+1}\right)$$

❑ که در آن یک قطب $p = -\frac{1}{T_p}$ و یک صفر در نقطه $z = -\frac{1}{T_z}$ به کنترل تناسبی اضافه شده است.

✓ کنترلگر پیش فاز حالت جامع کنترلگر PD است که در آن صفر اضافه شده به مبدا نزدیکتراست.

✓ کنترلگر پس فاز حالت جامع کنترلگر PI است که در آن قطب اضافه شده به مبدا خیلی نزدیکتر است $T_p \gg 1$.





برگرفته از کتاب Franklin

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلگر دینامیکی

✓ چرا و چگونه به کنترلگر تناسبی قطب یا صفر اضافه کنیم؟

❑ ابتدا با طراحی کنترلگر تناسبی آغاز کنید. اگر اهداف کنترلی ارضا نشد، از کنترلگر دینامیکی استفاده کنید.

❑ برای کاهش خطای ماندگار کنترلگر PI یا Lag استفاده کنید.

- کنترلگر PI تیپ سیستم را افزایش داده و خطای ماندگار را صفر می کند
- کنترلگر Lag تیپ سیستم را افزایش نداده ولی خطای ماندگار را کم می کند.

❑ برای افزایش سرعت پاسخ و کاهش نوسانات از کنترلگر PD یا Lead استفاده کنید.

❑ می توان در دو مرحله متوالی کنترلگر PID یا Lead-Lag را طراحی نمود

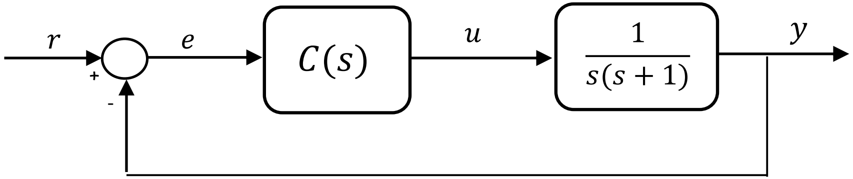
- این کنترلگرها هم خطای ماندگار را کم می کنند و هم سرعت پاسخ را تندتر نموده و نوسانات را کنترل می کنند و در صنعت بسیار کاربرد دارند.

برگرفته از کتاب Franklin

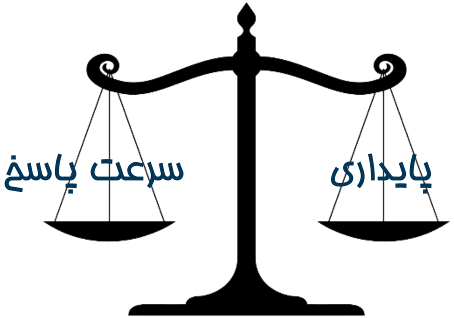
طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

- **طراحی کنترلگر PD یا پیش فاز**

✓ مدل ساده شده سیستم نوعی موتور DC را در نظر بگیرید:

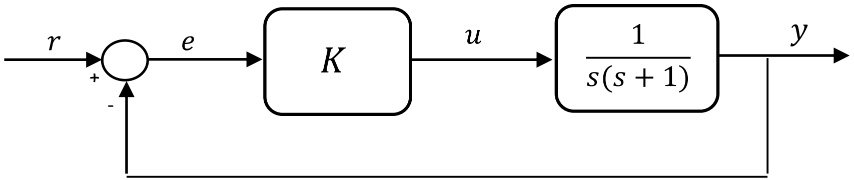


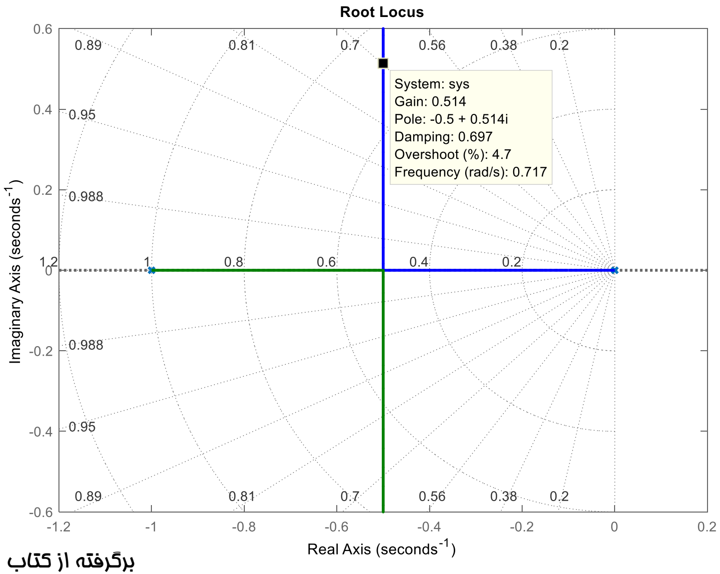
✓ محدودیت کنترلگر تناسبی $C(s) = K$ را در پاسخ به مصالحه زیر را بررسی می کنیم.



برگرفته از کتاب Franklin

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها





برگرفته از کتاب Franklin

- ## طراحی کنترلگر PD یا پیش فاز
  - ✓ مکان هندسی ریشه ها را رسم می کنیم
  - ✓ به ازای $K > 0$ سیستم پایدار است.
  - ✓ با بزرگ شدن بهره کنترلی $K \gg 1$
    - ❑ قطب های مزدوج از محور حقیقی دور می شوند

$$s = \sigma \pm j\omega_n$$

  - ✓ سرعت پاسخ زیاد می شود $\omega_n \gg 1$
  - ✓ اما نسبت استهلاک کم می شود $\zeta \ll 1$
    - ❑ پس نوسانات پاسخ زیاد است.
  - ✓ به عنوان مثال نقطه مطلوب از نظر نوسانات را بررسی کنید.

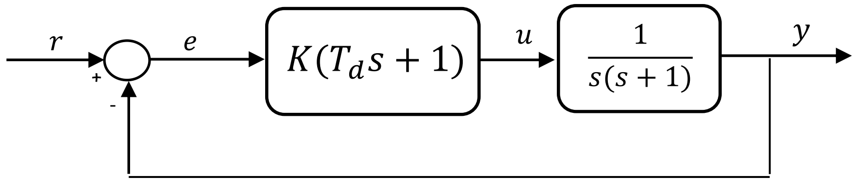
$$\zeta \approx 0.7, \qquad K \approx 0.5, \qquad \omega_n \approx 0.7$$

این سرعت اصلا برای سیستم کافی نیست!

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلگر PD

✓ با اضافه کردن یک صفر سمت چپ PD مکان هندسی به سمت چپ جذب می شود:



✓ در کنترلگر PD دو پارامتر طراحی داریم

❑ امکان رسیدن به سرعت بیشتر و نگهداشتن شرایط مطلوب نوسانات فراهم است

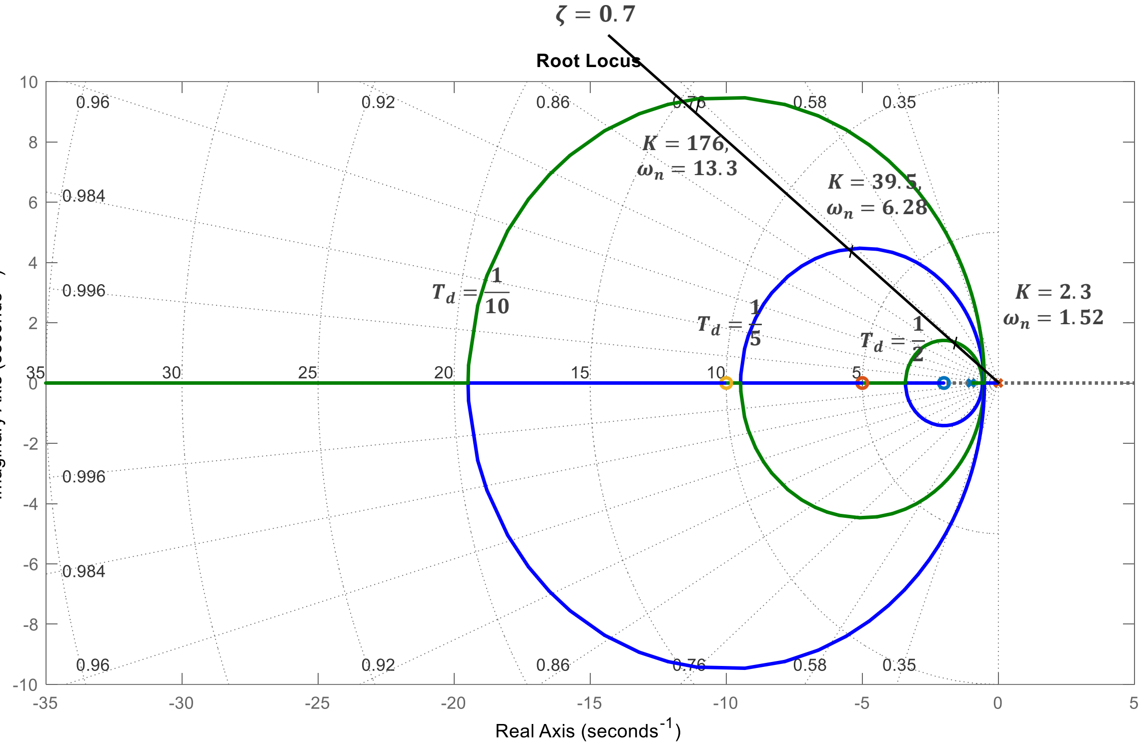
❑ مکان هندسی ریشه ها تنها برای یک پارامتر متغیر قابل ترسیم است

❑ دسته ای از مکان های ریشه ها را به ازای صفرهای اضافه شده در $z_d=-\frac{1}{T_d}=-2,-5\ \ -10$ رسم می کنیم.

برگرفته از کتاب Franklin

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

- طراحی کنترلگر PD



با کوچک کردن T_d صفر اضافه شده از مبدا دور می شود و دایره ایجاد شده به سمت صفر جذب می شود.

به منظور حفظ $\zeta = 0.7$ مطلوب:

For $T_d = \frac{1}{2} \rightarrow K = 2.3,\ \omega_n = 1.52$

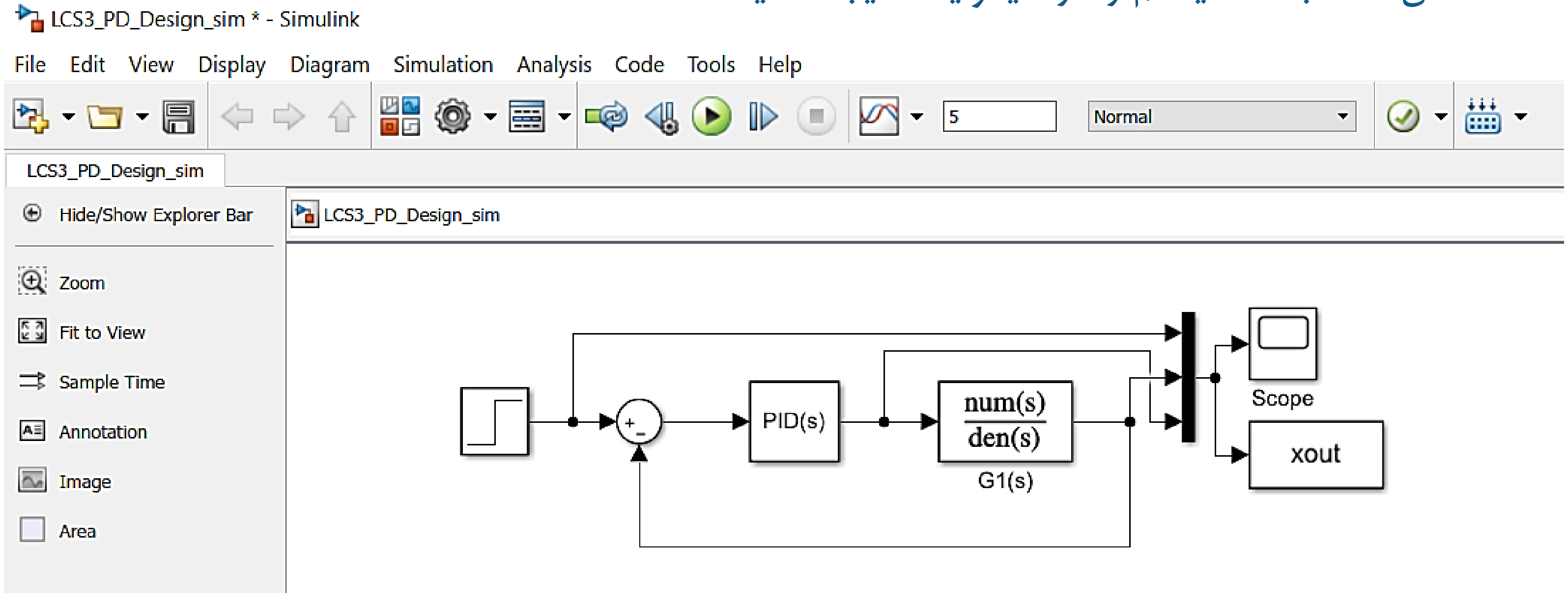
For $T_d = \frac{1}{5} \rightarrow K = 39.5,\ \omega_n = 6.28$

For $T_d = \frac{1}{10} \rightarrow K = 176,\ \omega_n = 13.3$

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

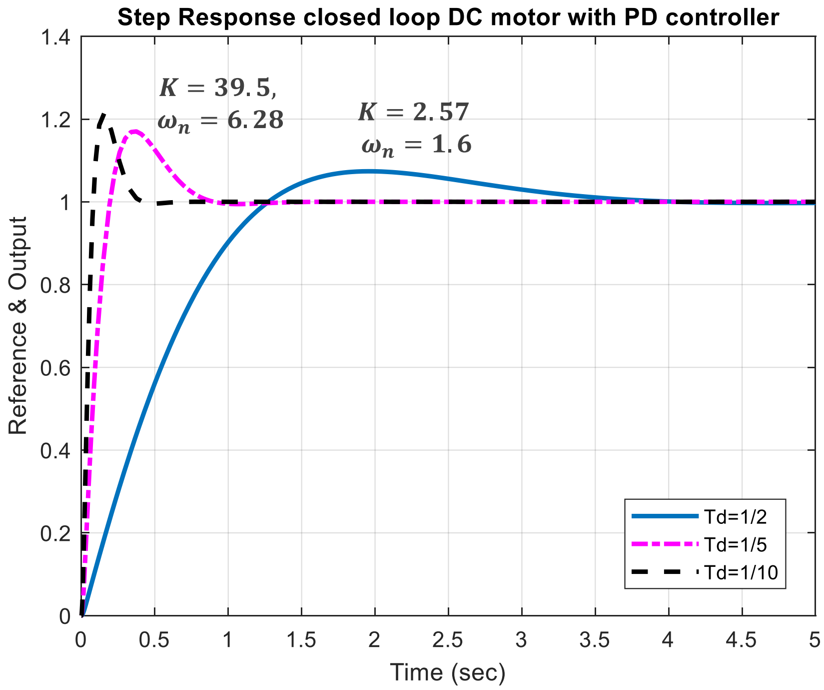
- ## طراحی کنترلگر PD

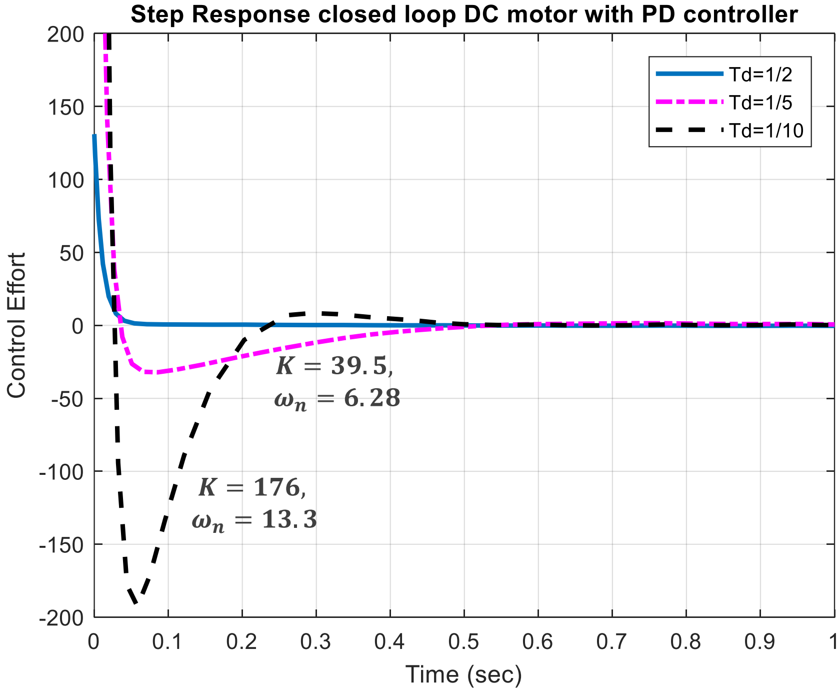
✓ مدل حلقه بسته سیستم را در سیمولینک ایجاد کنید



طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

- طراحی کنترلگر PD : پاسخ پله سه کنترلگر طراحی شده

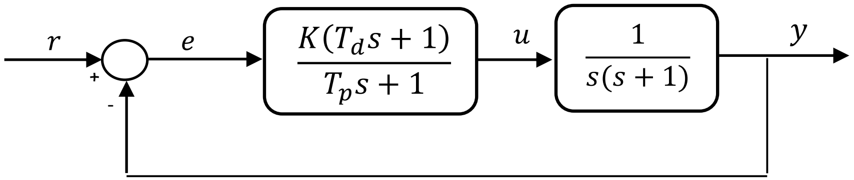




طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

- **طراحی کنترلگر پیش فاز**

✓ کنترلگر PD علّی نیست و در عمل با اضافه کردن یک قطب قابل پیاده سازی است.



✓ در کنترلگر پیش فاز سه پارامتر طراحی داریم

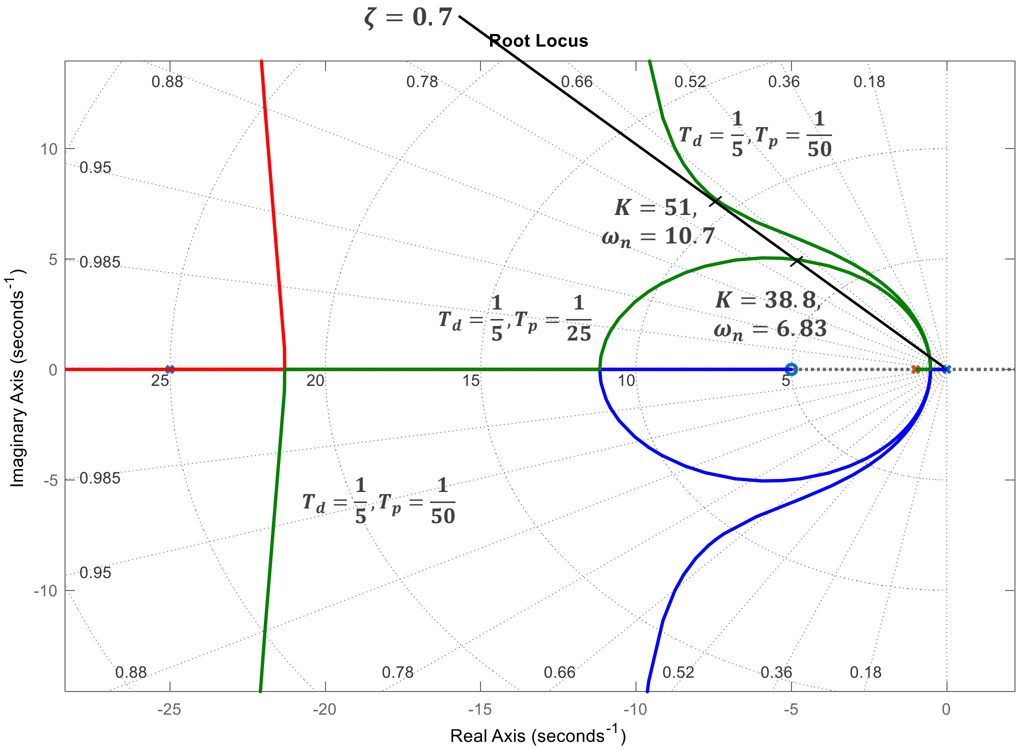
❑ پس از نهایی کردن محل صفر در مرحله قبل محل مناسب قطب را تعیین می کنیم.

❑ به ازای $z_{lead} = -\frac{1}{T_d} = -5$ انتخاب هایی برای قطب به صورت زیر انجام می دهیم.

❑ دسته ای از مکان های ریشه ها را به ازای صفرهای اضافه شده در $p_{lead} = -\frac{1}{T_p} = -25, -50$ رسم می کنیم.

برگرفته از کتاب Franklin

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها



برگرفته از کتاب Franklin

• طراحی کنترلگر پیش فاز

با دور کردن صفر اضافه شده از مبدا شکل مکان هندسی ریشه ها بزرگتر شده و بهره و سرعت بیشتری را می توان به دست آورد.

به منظور داشتن نوسانات مناسب $\zeta = 0.7$ و $T_d = 1/5$ را در نظر بگیرید:

For $T_p = \frac{1}{50}$ and $K = 51 \rightarrow \omega_n = 10.7$

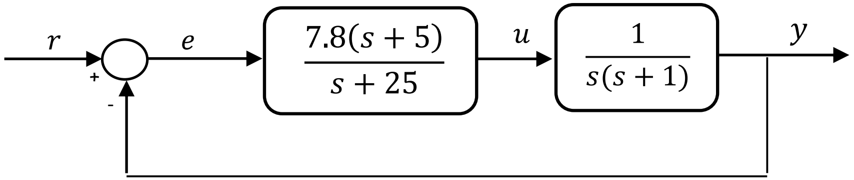
For $T_d = \frac{1}{25}$ and $K = 38.8 \rightarrow \omega_n = 6.83$

با در نظر گرفتن $T_d = \frac{1}{5}, T_p = \frac{1}{25}$ رفتار پاسخ خیلی تغییر نمی کند

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلگر پس فاز

✓ سیستم حلقه بسته نهایی مثال قبل را با کنترلگر پیش فاز به صورت $C(s)=\frac{39(s/5+1)}{s/25+1}$ در نظر بگیرید.



✓ خطای ماندگار به ورودی شیب واحد در این سیستم برابر است با:

$$K_v=\lim_{s\to 0} sL(s)=\lim_{s\to 0}\frac{7.8}{(s+25)(s+1)}=7.8\rightarrow e_{ss}=\frac{1}{K_v}=0.128$$

❑ اگر بخواهیم خطای ماندگار را ۱۰ برابر کاهش دهیم بایستی از یک کنترلگر پس فاز بهره DC برابر ۱۰ و به عنوان محل قرار گیری قطب و صفر زیر استفاده کنیم.

$$C(s)=\frac{s+0.1}{s+0.01}$$

❑ در این حالت

$$L(s)=\frac{7.8(s+5)}{s+25}\frac{s+0.1}{s+0.01}\frac{1}{s(s+1)}\rightarrow K_v=78, e_{ss}=0.0128$$

برگرفته از کتاب Franklin

طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

• طراحی کنترلگر پس فاز

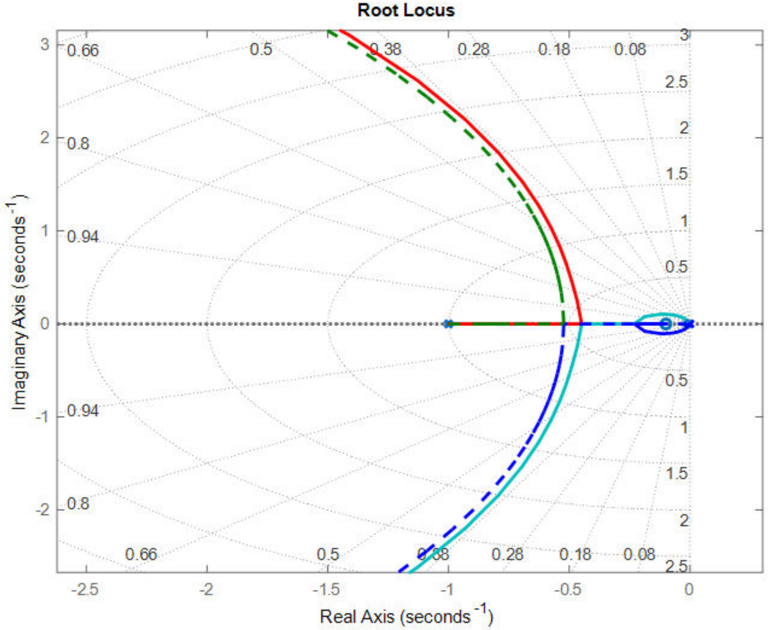
✓ مکان هندسی را برای دو حالت رسم کنید.

- ❑ کنترلگر پیش فاز (خط توپر)
- ❑ کنترلگر Lead-Lag (خط چین)

✓ در این حالت شکل مکان تغییر محسوسی نکرده است.

✓ نزدیک مبدا را بزرگ کنید.

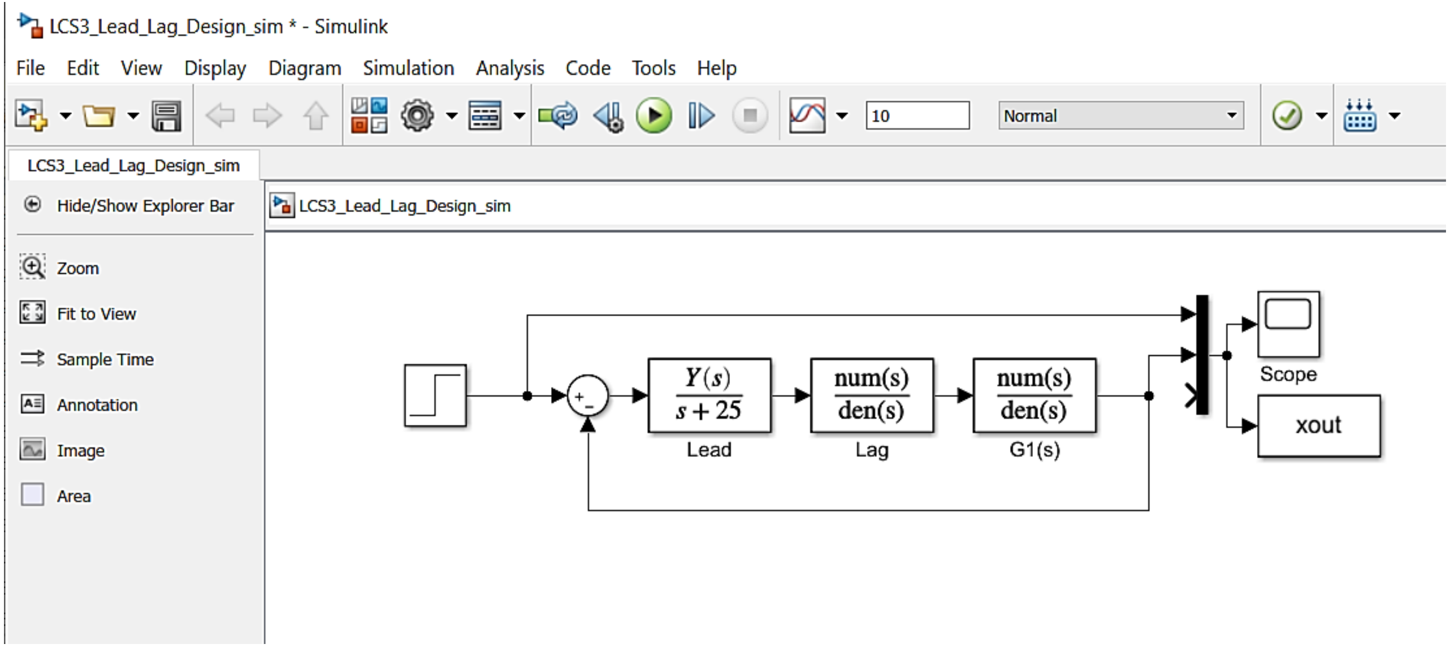
- ❑ یک قطب و صفر نزدیک به مبدا اضافه شده
- ❑ حالت گذرای کندی به سیستم تحمیل شده است
- ❑ پاسخ دارای خطای ماندگار صفر ولی کندتر از حالت قبل است.



برگرفته از کتاب Franklin

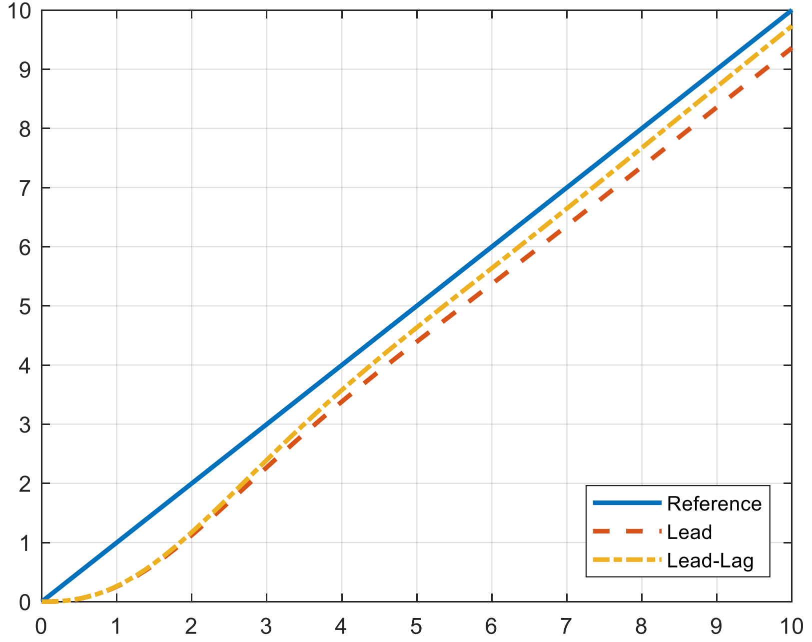
طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

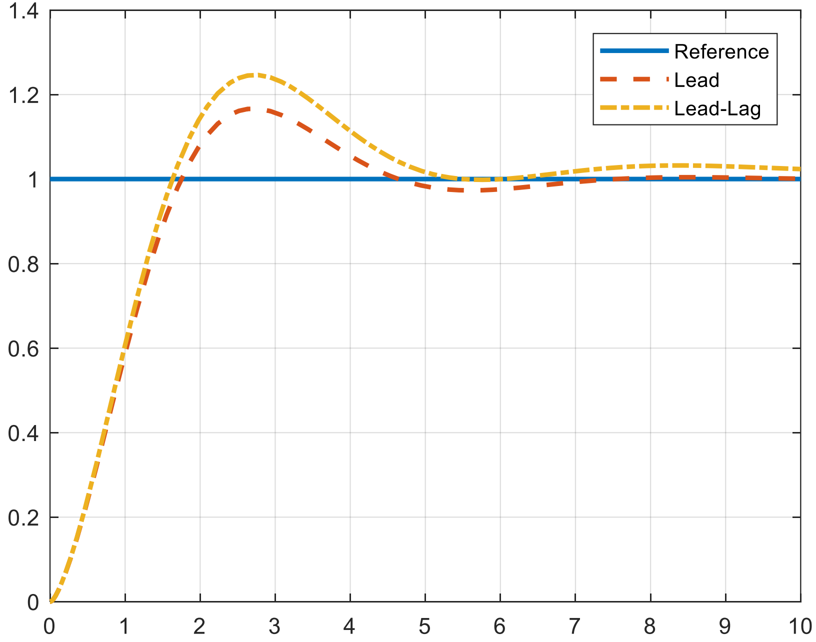
- طراحی کنترلگر Lead-Lag: مدلسازی در سیمولینک



طراحی سیستم کنترل توسط مکان هندسی ریشه ها

- طراحی کنترلگر Lead-Lag: پاسخ پله و شیب





تحلیل مساله ابتکاری با مکان هندسی ریشه ها

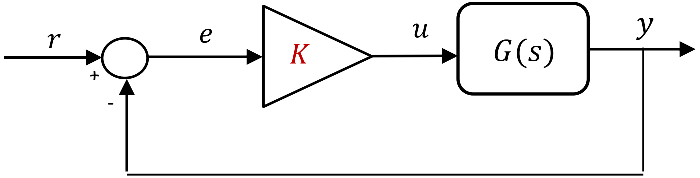
• مساله طراحی نمونه

✓ فیلتر زیر را در نظر بگیرید که از یک مدار فعال ساخته شده است که در آن K یک پارامتر طراحی است. K رابه گونه ای طراحی کنید که میزان استهلاک در فیلتر بیشینه شود.

$$M(s)=\frac{0.01Ks(s^2\ +100)}{(0.01K+1)s^3\ +\ s^2+(K+1)s+1}$$

❑ ظاهر این مساله به مکان هندسی ریشه ها هیچ ارتباطی ندارد، ولی تنها یک پارامتر طراحی داریم و با استفاده از ابزار مکان هندسی ریشه ها بیشینه میزان استهلاک (بیشینه میزان ζ) را می توان به صورت ترسیمی تعیین نمود.

✓ آیا می توان مساله را به فرم استاندارد مکان هندسی ریشه ها تبدیل کرد:

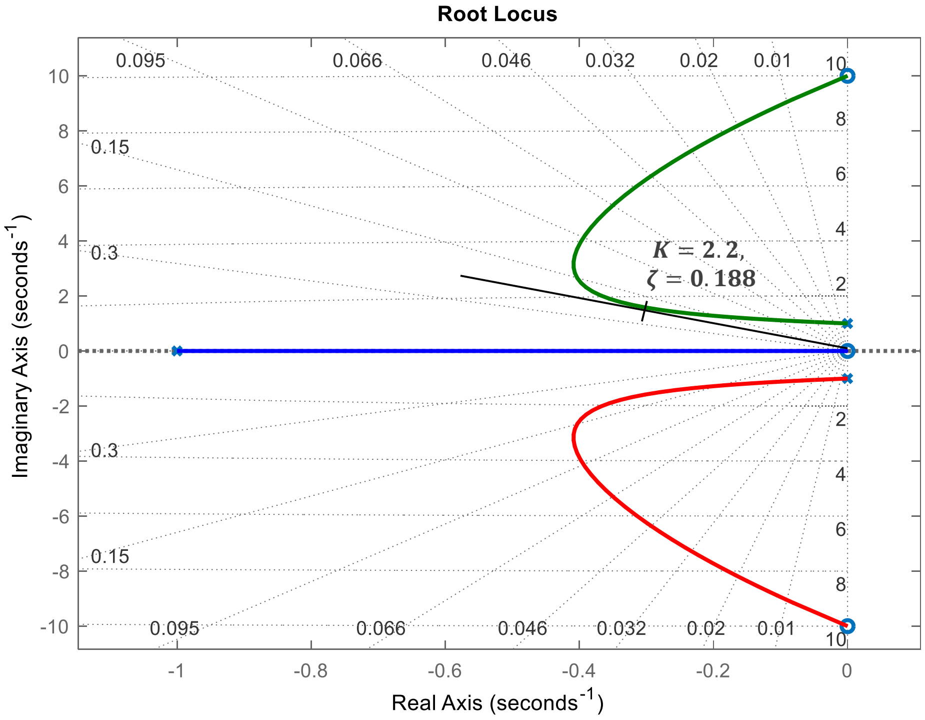


$$M(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)}\rightarrow KG(s)=\frac{M(s)}{1-M(s)}$$

$$\rightarrow\ KG(s)=\frac{0.01Ks(s^2\ +100)}{s^3+s^2+s+1}$$

$$\rightarrow G(s)=\frac{0.01s(s^2\ +100)}{s^3+s^2+s+1}$$

تحلیل مساله ابتکاری با مکان هندسی ریشه ها



- ## مساله طراحی نمونه

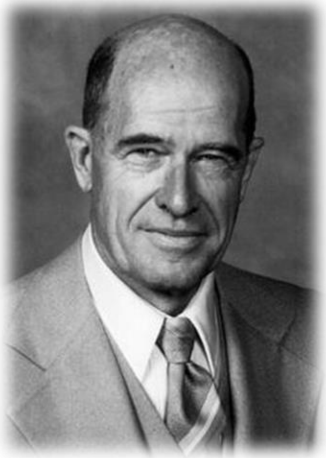
  ✓ مکان هندسی ریشه ها را برای $G(s) = \frac{0.01s(s^2+100)}{s^3+s^2+s+1}$ ترسیم کنید:

  بیشینه استهلاک به ازای بیشینه ζ به دست می آید.

  ❑ خط مماس با منحنی را ترسیم کنید.

  ❑ اطلاعات نقطه مماس را به دست آورید.

  ✓ بیشینه استهلاک با $K = 2.2$ به دست می آید.



Walter R. Evans

(January 15, 1920 – July 10, 1999)

was a noted American control theorist and the inventor of the root locus method in 1948. He was the recipient of the 1987 American Society of Mechanical Engineers Rufus Oldenburger Medal and the 1988 AACC's Richard E. Bellman Control Heritage Award. He received his B.E. in Electrical Engineering from Washington University in St. Louis in 1941 and his M.E. in Electrical Engineering from the University of California, Los Angeles in 1951. Evans worked as an engineer at several companies, including General Electric, Rockwell International, and Ford Aeronautic Company. He published a book named "Control System Dynamics" with McGraw-Hill in 1954. He had four children. One of his children, Gregory Walter Evans, wrote an article about his father in the December 2004 issue of the IEEE Control Magazine. Evans was taught to play chess by his grandmother, Eveline Allen Burgess, the American Women's Chess Champion from 1907 to 1920.

برگرفته از پیوند

ARAS HI-TECH ROBOTIC SOLUTIONS
ADVANCED ROBOTICS & AUTOMATED SYSTEMS

بیوگرافی دکتر حمید رضا تقی راد

حمید رضا تقی راد مدرک کارشناسی خود را در مهندسی مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۶۸ و کارشناسی ارشد خود را در مهندسی مکانیک (مکاترونیک) در سال ۱۳۷۲ و دکترای خود را در مهندسی برق- کنترل و رباتیک در سال ۱۳۷۶ از دانشگاه مک گیل کانادا دریافت کرده است. او در حال حاضر معاون بین الملل دانشگاه، استاد تمام و مدیر گروه رباتیک ارس در دپارتمان کنترل و سیستم، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی است. ایشان دارای عضویت ارشد انجمن IEEE، عضو هیات تحریریه ژورنال بین المللی رباتیک: تئوری و کاربرد و ژورنال بین المللی سیسنم های پیشرفته رباتیک می باشد. زمینه های تحقیقاتی مورد علاقه وی کاربرد کنترل مقاوم و غیر خطی بر روی سیستم های رباتیک بوده و زمینه های مختلف رباتیک شامل ربات های موازی و کابلی، ربات های خودران، ربات ها جراحی و سامانه های هپتیک آموزش جراحی چشم در حیطه تخصص ایشان قرار دارد. تالیفات ایشان شامل پنج کتاب و بیش از ۲۵۰ مقاله در کنفرانس ها و ژورنال های معتبر بین المللی است.

حمید رضا تقی راد
استاد

گروه رباتیک ارس

سیستم های کنترل خطی

برای مطالعه بیشتر و مشاهده فیلم های ضبط شده کلاس مجازی
به این سایت مراجعه نمایید

متشکرم