دانشکده مهندسی برق
گروه کنترل و سیستم
نیم‌سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

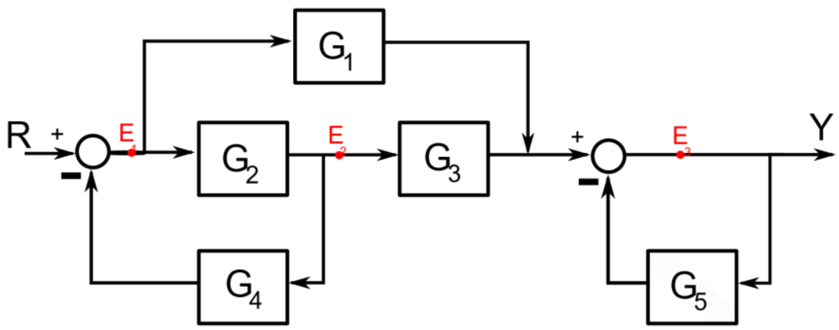
بنام آنکه جان را فکرت آموخت

سیستم‌های کنترل خطی

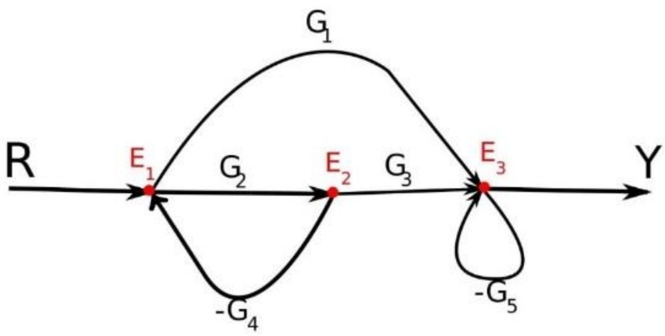
پاسخ آزمون میانی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
استاد: حمید رضا تقی راد

۱) خروجی‌های جمع‌کننده‌ها و محل انشعاب‌ها را نام گذاری می‌کنیم:



سپس نمودار گذر سیگنال را رسم می‌کنیم:



مسیرهای پیش رو را مشخص می‌کنیم:

بهره	مسیر	شماره (k)
$M_1 = G_2G_3$	$RE_1E_2E_3Y$	۱
$M_2 = G_1$	$R\ E_1E_3Y$	۲

حلقه‌ها:

بهره	حلقه
$L_1 = -G_2G_4$	$E_2E_3E_2$
$L_2 = -G_5$	E_3E_3

بهره حلقه‌ها:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) \; + \; L_1 L_2 = 1 + (G_2 G_4 + G_5) + G_2 G_4 G_5$$

حلقه‌ها با مسیرهای پیش رو در تماس‌اند. پس:

$$\Delta_1 = \; \Delta_2 = 1$$

با استفاده از قانون بهره میسون داریم:

$$G = \frac{Y}{R} = \; \sum_{k=1}^{2} \frac{M_k \Delta_1}{\Delta} = \; \frac{G_1 + G_2 G_3}{1 + G_2 G_4 + G_5 + G_2 G_4 G_5}$$

۲) سیگنال خطا برای ورودی مرجع عبارت است از:

$$E(s) = [1 - T(s)]R(s) = \left[1 - \frac{1}{s^2 + s + k}\right] R(s) = \left[\frac{s^2 + s + k - 1}{s^2 + s + k}\right] R(s)$$

خطای ماندگار برای ورودی مرجع پله واحد به صورت زیر خواهد بود:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{s^2 + s + k - 1}{s^2 + s + k}\right) \frac{1}{s} = \frac{k - 1}{k}$$

مشاهده می شود که برای $k = 1$ خطای حالت ماندگار به ازای ورودی پله صفر می شود.

خطای ماندگار برای ورودی مرجع شیب واحد به صورت زیر خواهد بود:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{s^2 + s + k - 1}{s^2 + s + k}\right) \frac{1}{s^2}$$

خطای حالت ماندگار تنها برای $k = 1$ محدود و برابر یک است و برای $k \neq 1$ نامحدود است.

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{s^2 + s}{s^2 + s + 1}\right) \frac{1}{s^2} = 1$$

سیگنال خطا برای ورودی اغتشاش همان خروجی سیستم به ازای $R(s) = 0$ است و عبارت است از:

$$C(s) = \left[\frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{k}{s(s+1)}}\right] D(s) = [\frac{1}{s^2 + s + k}] D(s)$$

خطای حالت ماندگار برای ورودی اغتشاش پله واحد برابر خواهد بود با:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{1}{s^2 + s + k}\right) (\frac{1}{s}) \; = \frac{1}{k}$$

با توجه به موارد فوق به نظر می‌رسد مقدار $k = 1$ مناسب باشد چرا که منجر به صفر شدن خطای حالت ماندگار به ورودی پله، محدود شدن خطای ماندگار به ورودی شیب و اغتشاش پله می‌شود.

۳) ابتدا پایداری سیستم را با راث-هورویتز بررسی می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم عبارت است از:

$\Delta = s^2 + 2\alpha s + 1 + k$

s^2	1	1+k
s^1	2α	0
s^0	1+k	0

بنابراین برای پایدار بودن سیستم کافیست $k \geq -1$ باشد.

پارامتر α مثل ضریب k_d در کنترلر PD عمل می‌کند که با افزایش مقدار آن، مقدار فراجهش کاهش خواهد یافت. می‌توان به صورت ریاضی نیز آن را اثبات کرد:

$$P.O. = 100\, e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}},\ \ \zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{1+k}} \rightarrow P.O = 100 e^{-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1+k-\alpha^2}}}$$

$$\rightarrow \frac{dPO}{\alpha} = -100\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1+k-\alpha^2}} - \frac{\alpha^2}{\left(\sqrt{1+k-\alpha^2}\right)^3}\right)e^{-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1+k-\alpha^2}}}$$

$$\frac{dPO}{\alpha} = -100\pi\left(\frac{1+k}{\left(\sqrt{1+k-\alpha^2}\right)^3}\right)e^{-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1+k-\alpha^2}}} < 0$$

بنابراین مقدار اورشوت نسبت به پارامتر α اکیدا نزولی است. بنابراین بیشترین مقدار فراجهش در کمترین مقدار α اتفاق میفتد. پس می‌توانیم طراحی کنترلر را با کمترین مقدار α انجام دهیم. اگر به ازای کمترین مقدار α مقدار فراجهش کمتر از ۷ درصد باشد، به ازای تمامی مقادیر α در بازه داده شده، مقدار فراجهش کمتر از ۷ درصد خواهد بود.

$$0.07 \geq e^{-\frac{\pi}{\sqrt{1+k-1}}} \rightarrow 2.66 \leq \frac{3.14}{\sqrt{k}} \rightarrow \boldsymbol{k} \ \leq \mathbf{1.39}$$

برای برآورده کردن معیار دوم طراحی، خواهیم داشت:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+k-\alpha^2}}$$

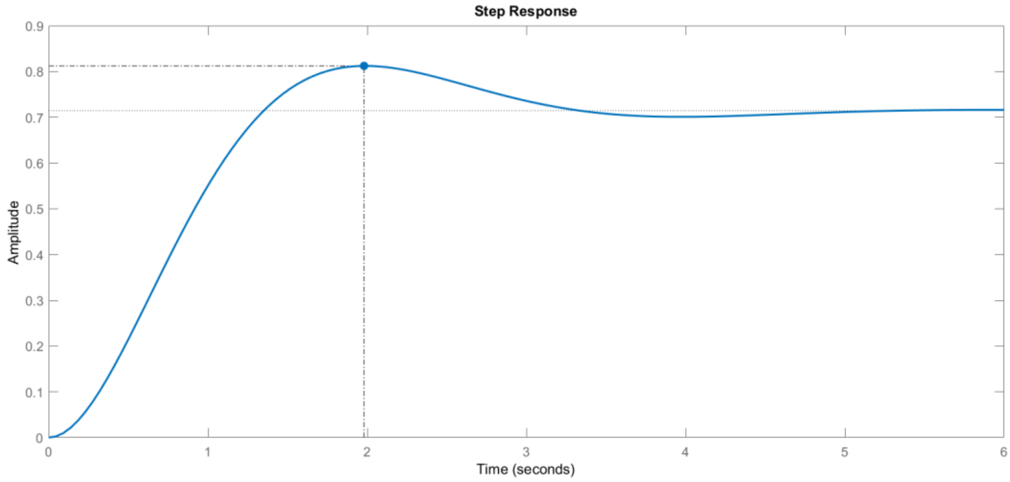
با توجه به رابطه محاسبه زمان فراجهش، با افزایش مقدار α مقدار t_p نیز افزایش می‌یابد. بنابراین بیشینه مقدار t_p به ازای بیشترین مقدار α اتفاق خواهد افتاد.

$$t_p \leq 1.5 \rightarrow \frac{3.14}{\sqrt{1+k-4.41}} \leq 1.5 \rightarrow 4.38 \leq k - 3.41 \rightarrow \mathbf{7.79} \leq \boldsymbol{k}$$

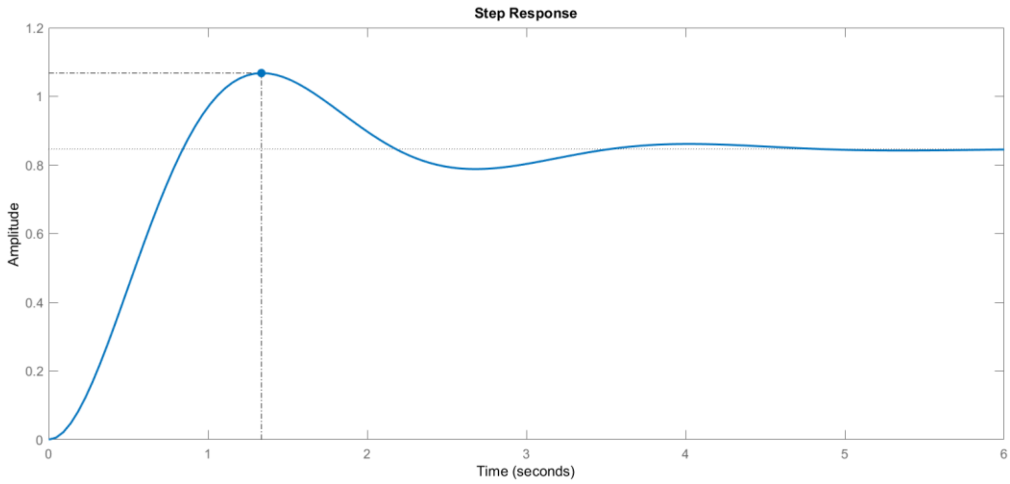
مشاهده می‌شود که حدود بدست آمده برای گین تناسبی کنترلگر در خواسته طراحی اول ($\boldsymbol{k} \ \leq \mathbf{1.39}$) و دوم ($\mathbf{7.79} \leq \boldsymbol{k}$) با هم همپوشانی ندارد لذا با یک کنترلگر تناسبی نمی‌توان به این خواسته‌های طراحی بصورت توأمان رسید.

توضیحات تکمیلی) با توجه به این موضوع که با یک گین کنترلی نمی‌توان به هر دو خواسته کنترلی رسید، می‌توان مصالحه‌ای ایجاد کرد. اگر در سیستم داده شده، اهمیت میزان اورشوت بیشتر باشد و اورشوت بیشتر باعث صدمه رسیدن به سیستم شود، می‌توان ضریب کنترلگر را برابر ۲.۵ در نظر گرفت که ماکزیمم اورشوت

را به توجه به عدم قطعیت به حدود ۱۳.۸ درصد برساند، ولیکن زمان فراجهش به حدود ۲ ثانیه افزایش پیدا خواهد کرد.



در صورتی که سرعت سیستم حائز اهمیت بیشتری باشد و در عین حال، میزان اورشوت آسیبی به سیستم نزند، می‌توان ضریب کنترلر را برابر ۵.۵ در نظر گرفت. در این حالت زمان رسیدن به اورشوت حدود ۱.۳۴ ثانیه خواهد شد. ولی باید توجه داشت که با این شرایط، اورشوت به ۲۶.۲ درصد خواهد رسید.



۴) الف) محاسبه اورشوت و زتا:

$$overshoot = \frac{1.32 - 0.8}{0.8} = 65\%$$

$$e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 65\% \rightarrow \zeta \approx 0.135$$

محاسبه ω_n با توجه به زمان نشست:

$$settling\ time \approx 32\ s\ = \frac{4}{\zeta\omega_n} \rightarrow \omega_n = 1.08$$

از روی نمودار می‌توان پی برد که حالت ماندگار سیستم برابر ۰.۸ است. چون در سوال گفته شده تابع درجه دو است، میتوان مقدار ω_n را به دست آورد:

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{\omega_n^2}=0.8\rightarrow\omega_n=1.118$$

که تقریبا با محاسبات قبلی برابر است. در نتیجه تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$T(s)=\frac{1}{s^2+0.3s+1.25}$$

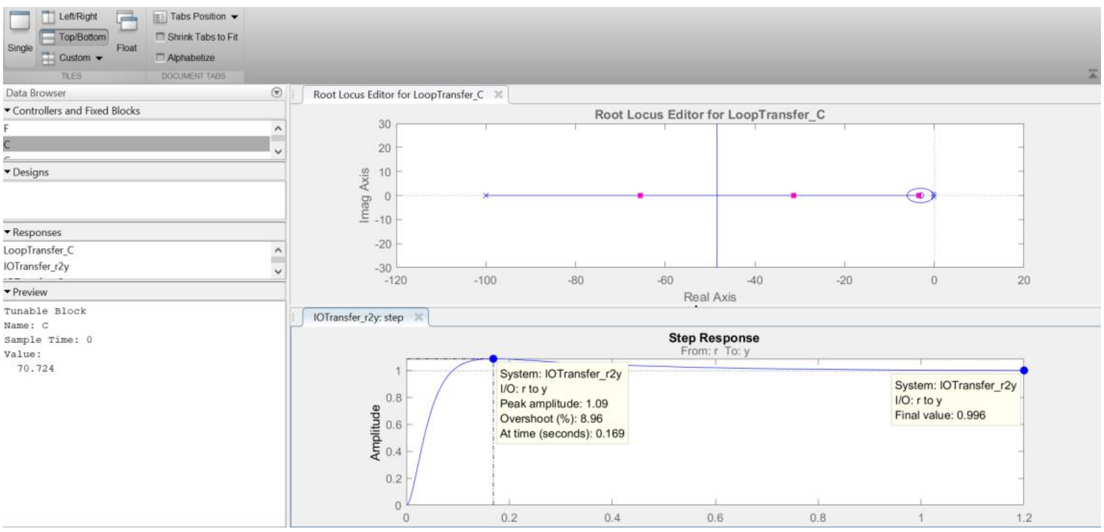
تابع تبدیل حلقه باز:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+0.3s+0.25}$$

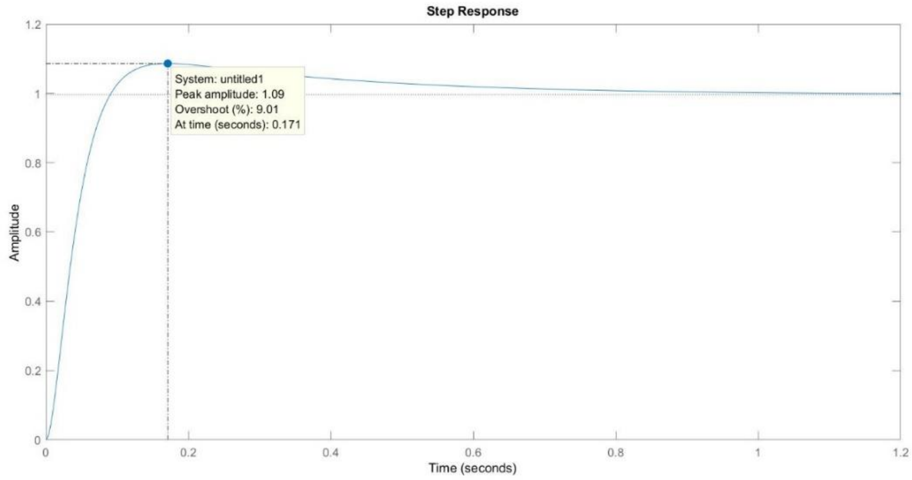
ب) خواسته های کنترلی با گین ساده برآورده نخواهند شد. بنابراین کنترلر پیشنهادی PD است. با توجه به مکان ریشه اولیه سیستم، صفر کنترلر را روی ۶- و قطب سیستم را روی ۲۵- می‌گذاریم. پس کنترلر به صورت زیر در می‌آید:

$$C(s)=\frac{100}{5}\frac{s+5}{s+100}$$

سپس با توجه به مکان ریشه جدید سیستم، گین کنترلی طراحی می‌کنیم. بدیم منظور می‌توانیم از *sisotool* استفاده نماییم:



که لازم است گین را حدود ۷۰ بگذاریم تا به خواسته‌های کنترلی دست پیدا کنیم.


Step Response
System: untitled1
Peak amplitude: 1.09
Overshoot (%): 9.01
At time (seconds): 0.171
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

موفق باشید.