دانشکده مهندسی برق
گروه کنترل و سیستم
نیم‌سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

# سیستم‌های کنترل خطی

حل تمرین سوم

۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
استاد: حمید رضا تقی راد

**۱)** محل تلاقی مجانب‌ها به صورت زیر است:

$$\delta_0 = \frac{-\alpha-\beta}{3} = -\frac{11}{9} \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{11}{3} \quad (1)$$

نقطه شکست:

$$\frac{dG(s)}{ds} = 3s^2 + 2(\alpha+\beta)s + \alpha\beta = 0$$

باید $s=-\frac{4}{9}$ در معادله فوق صدق کند.

$$3\left(-\frac{4}{9}\right)^2 - 2(\alpha+\beta)\left(\frac{4}{9}\right) + \alpha\beta = 0 \quad (2)$$

با استفاده از جاگذاری معادله (۱) در (۲) خواهیم داشت:

$$\alpha\beta = \frac{8}{3} \quad (3)$$

معادله مشخصه سیستم به صورت زیر است:

$$\Delta(s) = s^3 + (\alpha+\beta)s^2 + \alpha\beta s + K = 0$$

با توجه به معادله (۱) و (۳) :

$$\Delta(s) = s^3 + \frac{11}{3}s^2 + \frac{8}{3}s + K = 0$$

برای بررسی پایداری سوال از راث-هرویتز کمک می‌گیریم:

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | $1$ | $\frac{8}{3}$ |
| $s^2$ | $\frac{11}{3}$ | $K$ |
| $s^1$ | $\frac{88}{9}-K$ | |
| $s^0$ | $K$ | |

به ازای $0 < K < \frac{88}{9}$ سیستم پایدار خواهد بود.

**۲)** درجه صورت و مخرج برابر است پس مجانب نداریم. صفر و قطب‌های سیستم از قرار زیراند:

$$Z = +1 \pm j, \qquad P = -1 \pm j$$

هیچ قسمتی از محور حقیقی جزو مکان هندسی نیست. با توجه به اینکه مکان هندسی از قطب‌ها به سمت صفرها حرکت می‌کند، محور موهومی را قطع میکند.

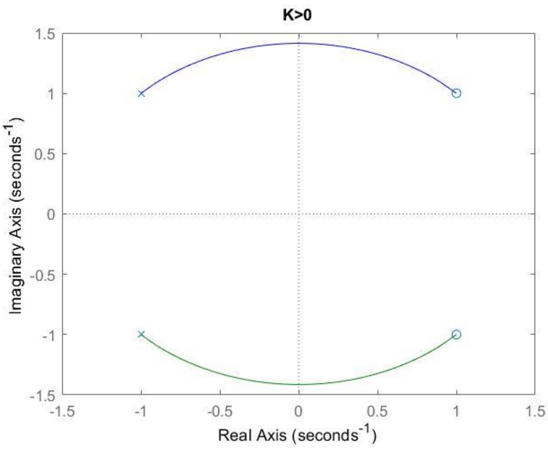
برای به دست آوردن محل قطع از جدول روث-هرویتز استفاده میکنیم:

| | | |
|---|---|---|
| $S^2$ | $K+1$ | $2K+2$ |
| $S^1$ | $2K-2$ | $0$ |
| $S^0$ | $0$ | $0$ |

$$s^1: 2k-2=0 \rightarrow k=1$$

$$s^2: 2s^2+4=0 \rightarrow s=\pm\sqrt{2}j$$

نمودار:




**۳)** تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر است:

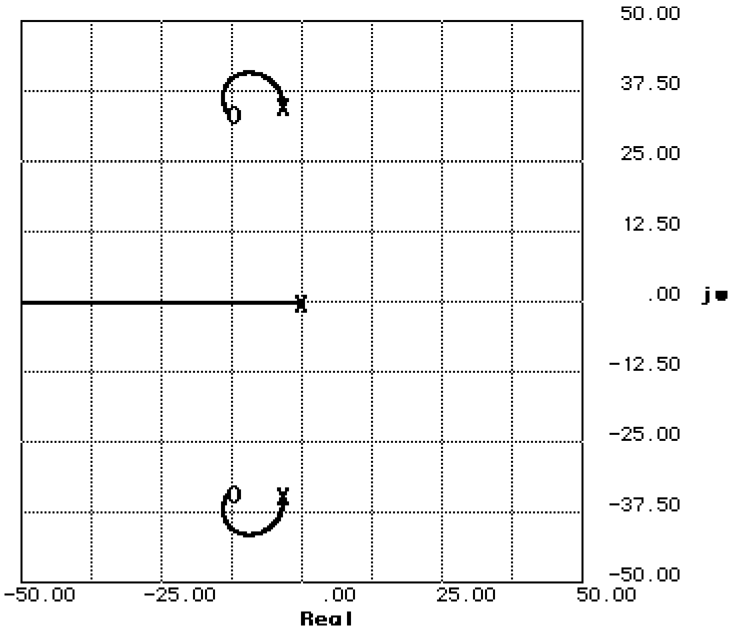
$$G = \frac{1}{s^3 + 7\,s^2 + 1220\,s}$$

$$H = \frac{0.00076\,s^3 + 0.02\,s^2 + 1.001\,s + 0.06}{s + 0.06}$$

پس داریم:

$$GH = \frac{0.00076\,s^3 + 0.02\,s^2 + 1.001\,s + 0.06}{s^4 + 7.06\,s^3 + 1220\,s^2 + 73.2\,s}$$

مکان ریشه به صورت زیر ترسیم می‌گردد:




با بررسی نمودار مکان ریشه می‌توان ۳ قطب را به صورت تخمینی یافت:

$$k = 64510 \rightarrow s = -10 \pm 41.085j$$
$$k = 64510 \rightarrow s = -36.09$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\zeta = \arccos\left(\tan^{-1}\left(\frac{41.085}{10}\right)\right) = 0.236$$

$$OS\% = 100e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 46.63\%$$

$$\omega_n = \sqrt{10^2 + 41.085^2} = 42.28\, rad/s$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0.4s$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.076s$$

**۴)** نقطه $A$ نقطه شکست مکان ریشه‌های سیستم است. لذا با تعیین نقطه شکست می‌توان مقدار $k$ را نیز به راحتی محاسبه کرد. تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارت است از:

$$G_1H_1(s) = \frac{s(s+4)}{s^2+2s+2} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

نقاط شکست از رابطه زیر تعیین می‌شوند:

$$P(s)Q'(s) = P'(s)Q(s)$$
$$(2s+4)(s^2+2s+2) = (2s+2)s(s+4)$$
$$s = -1 \pm \sqrt{5}$$

نقطه $s=-1+\sqrt{5}$ جزو مکان ریشه‌ها نیست بنابراین نقطه شکست نمی‌باشد. برای مکان ریشه‌های داده شده $s=-1-\sqrt{5}$ نقطه شکست بوده و مقدار $K$ در آن نقطه برابر است با:

$$k=-\left.\frac{s^2+2s+2}{s(s+4)}\right|_{s=-1-\sqrt{5}}=0.31$$

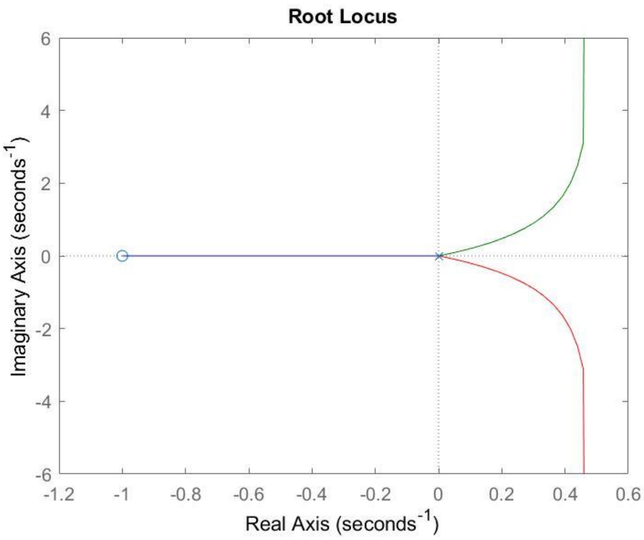
توجه کنید که در نقطه شکست، معادله مشخصه ریشه مکرر دارد بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta(s)=(1+k)s^2+(2+4k)s+2=0$$
$$(2+4k)^2-4(2)(1+k)=0 \Rightarrow k\cong 0.31$$

**۵)** ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$s^3+k(s+1)=0 \ \Rightarrow 1+k\frac{s+1}{s^3}=0$$

برای $K>0$:




به ازای تمامی $K>0$ همواره یک قطب حقیقی و دو قطب موهومی وجود دارد.

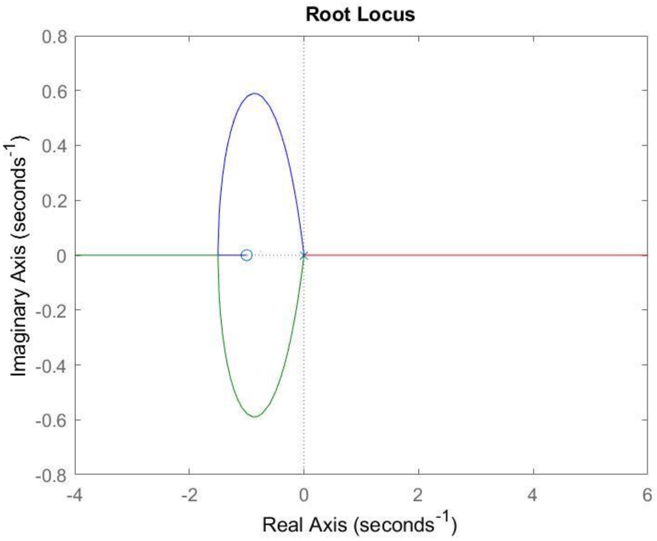
برای $K<0$:

طبق قانون ۶ در اسلاید ۱۵، می‌دانیم که اگر سیستم قطب حقیقی داشته باشد، نقطه تقاطع شاخه‌ها با محور حقیقی خواهد بود. باید توجه داشته باشیم که نقطه شکست، مرز بین موهومی بودن و حقیقی بودن مکان ریشه است. پس:

$$\frac{dG(s)}{ds}=0 \Rightarrow s^3-3s^3-3s^2=0 \Rightarrow s=0,-\frac{3}{2}$$

به ازای نقطه $s=0,-\frac{3}{2}$ ضریب $K$ را به دست می‌آوریم:

$$\left(1+K\frac{s+1}{s^3}\right)|_{s=-1.5}=1+K\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=0\Rightarrow\ K=-\frac{27}{4}$$




به ازای $-\infty<K<-\frac{27}{4}$ معادله مشخصه دارای ۳ ریشه حقیقی است.

---

موفق باشید.