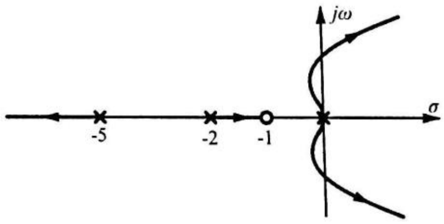
۱) برای سیستمی که مکان هندسی ریشه‌های آن در شکل زیر داده شده است. مقدار بهره را طوری تعیین کنید که خطای حالت ماندگار به ورودی سهمی برابر ۰.۱ گردد.



پاسخ:

با توجه به مکان ریشه‌های داده شده تابع تبدیل حلقه به صورت زیر خواهد بود:

$$GH(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+2)(s+5)}$$

و خطای حالت ماندگار سیستم نیز برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_u} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 GH(s)} = \frac{10}{k}$$

برای اینکه $e_{ss} = 0.1$ شود باید $k = 100$ باشد، ولی به شرطی که سیستم پایدار باشد. با تشکیل معادله مشخصه سیستم و استفاده از روش راث پایداری سیستم را بررسی می‌کنیم.

$$\Delta(s) = s^4 + 7s^3 + 10s^2 + ks + k = 0$$

s^4	1	10	k
s^3	7	k	
s^2	$70-k$	$7k$	$\times 7$
s^1	$\frac{k(21-k)}{70-k}$		
s^0	$7k$		

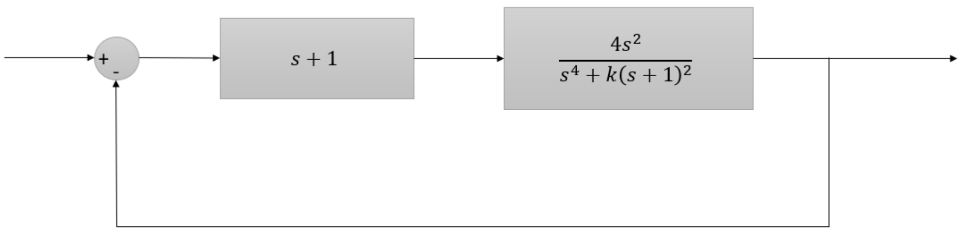
برای پایداری باید علامت همه درایه‌های ستون اول مثبت باشند.

$$70 - k > 0 \;\&\; k(21 - k) > 0 \Rightarrow 0 < k < 21$$

سیستم به ازای $K = 100$ ناپایدار است و حداقل خطای ماندگار برای این سیستم $\frac{10}{21}$ می‌باشد.

این سیستم به ازای گستره محدودی از k یعنی به ازای $0 < k < 14$ پایدار است. چنین سیستمی را سیستم با پایداری مشروط می‌نامند. در عمل سیستم با پایداری مشروط مطلوب نیست و خطرناک است و معمولا در سیستم‌هایی بروز می‌کند که مسیر پیشخوردی ناپایدار دارند و این نوع مسید پیشخوردی در صورت داشتن حلقه‌های داخلی به وجود می‌آید و در طراحی سیستم‌های کنترلی از پایداری مشروط پرهیز می‌کنند زیرا اگر به هر دلیلی بهره کمتر از حد بحرانی شود، سیستم ناپایدار می‌شود.

۲) بررسی کنید مکان ریشه سیستم زیر به ازای $k > 0$ نقطه شکست دارد یا خیر.



پاسخ:

ابتدا معادله مشخصه را بدست آورده و آن را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$\Delta(s) = 1 + \frac{4(s+1)s^2}{s^4 + k(s+1)^2} = 0 \Rightarrow s^4 + k(s+1)^2 + 4s^3 + 4s^2 = 0$$
$$\rightarrow 1 + k\frac{(s+1)^2}{s^2(s+2)^2} = 0$$

برای به دست آوردن نقطه شکست داریم:

$$\frac{dG(s)}{ds} = 0 \Rightarrow 2(s+1)s^2(s+2)^2 - 2s(s+1)^2(s+2)^2 - 2s^2(s+1)^2(s+2) = 0$$
$$s(s+1)(s+2)\big(2s(s+2) - 2(s+1)(s+2) - 2s(s+1)\big) = 0$$
$$s(s+1)(s+2)(-2s^2 - 4s - 4) = 0$$
$$\Rightarrow s = 0, \qquad s = -1, \qquad s = -2, \qquad s = -1 \pm j$$

توجه شود ممکن است گاهی اوقات شاخه‌های وارد شونده مربوط به $k < 0$ و شاخه‌های خارج شونده مربوط به $k > 0$ و یا برعکس باشند.

در این سوال، به ازای $s = 0$ ، $s = -1$ و $s = -2$ می‌توان بدون محاسبه اظهار نظر کرد. چون این اعداد قطب و صفرهای سیستم حلقه باز هستند، جزو مکان ریشه هستند.

روش اول: برای قطب‌های $s = -1 \pm j$ ، می‌توان k را حساب کرد و مشاهده کرد آیا $k > 0$ هست یا خیر.

$$s = -1 \pm j \Rightarrow 1 + k\frac{(s+1)^2}{s^2(s+2)^2}|_{s=-1\pm j} = 0$$
$$\to 1 + k\frac{(\pm j)^2}{(-1\pm j)^2(1\pm j)^2} = 0 \to k = 4$$

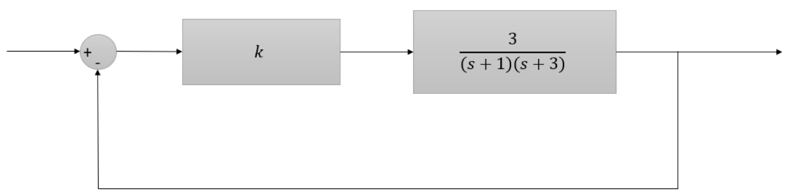
چون k حقیقی و مثبت است، بنابراین این دو نقطه شکست روی نمودار مکان ریشه به ازای $k > 0$ قرار دارند.

روش دوم: بررسی شرط زاویه:

$$2\angle(s+1) - 2\angle s - 2\angle(s+2)^2|_{s=-1\pm j} = 2\times\frac{\pi}{2} - 2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\pi$$

چون مضرب فردی از π است، بنابراین به ازای $k > 0$ روی مکان قرار دارد.

۳) سیستم زیر را در نظر بگیرید، با استفاده از متلب:



الف) ضریب k را محاسبه کنید که اورشوت برابر ۸ درصد شود.

ب) خطای حالت ماندگار را در این حالت محاسبه کنید.

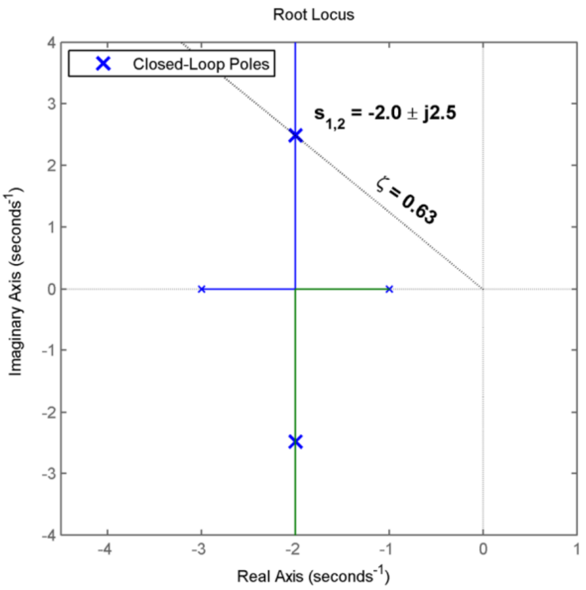
پ) آیا می‌توان با استفاده از تعیین گین، هم به خطای حالت ماندگار مناسب و اورشوت کمی رسید؟ تحلیل کنید.

پاسخ:

الف) معادله مشخصه را محاسبه می‌کنیم:

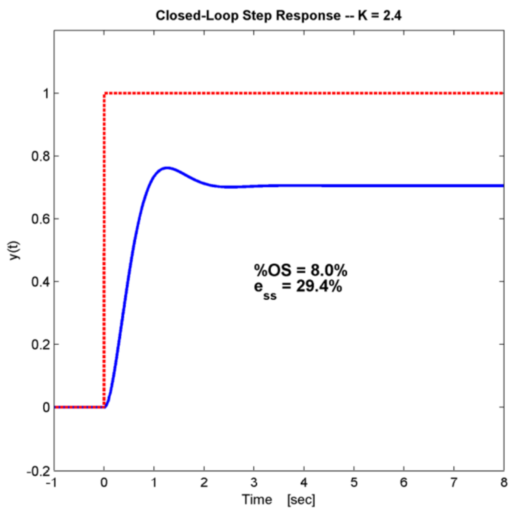
$$\Delta(s) = 1 + k\frac{3}{(s+1)(s+3)} = 0$$

مکان ریشه را رسم می‌کنیم:



به ازای $k = 2.4$ شرط کنترلی برقرار می‌شود.

ب) پاسخ سیستم:



خطای سیستم برابر ۲۹.۴ درصد است.

پ) اگر به تابع تبدیل حلقه بسته توجه کنیم:

$$H(s) = \frac{3k}{s^2 + 4s + 3 + 3k}$$

درمی‌یابیم که ضریب k تنها امکان ζ یا ω_n را به ما می‌دهد. پس با استفاده از طراحی گین کنترلی نمی‌توانیم هم به خطای کم و هم به اورشوت کم برسیم.

۴) به ازای چه بازه‌ای از k ، سیستم حلقه بسته برای تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s) = \frac{k}{s(s^2+4s+5)}$ میرای شدید است؟

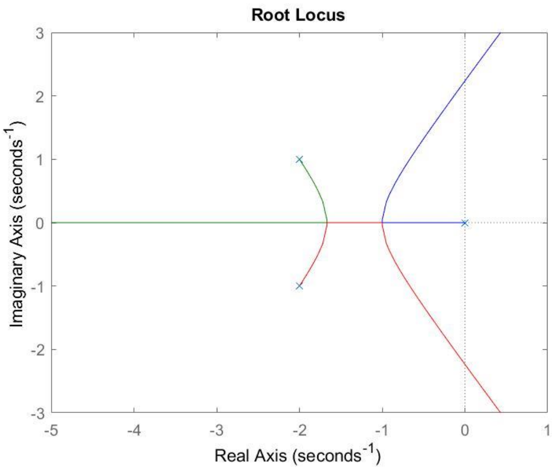
پاسخ:

برای میرایی شدید باید ریشه های معادله مشخصه حقیقی و منفی باشند.

نقاط شکست را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds}=0 \Rightarrow 3s^2+8s+5=0 \Rightarrow s=-1, s=-\frac{5}{3}$$

با توجه به نمودار مکان ریشه در فاصله $s=-\frac{5}{3}$ تا $s=-1$ ریشه‌های معادله حقیقی و منفی هستند.

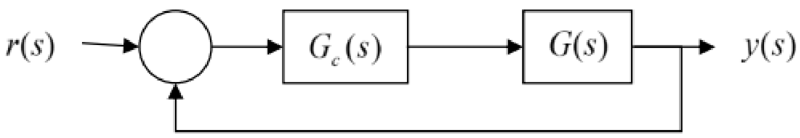


برای به دست آوردن محاسبه k نقاط را در معادله مشخصه جا گذاری می‌کنیم:

$$1+\frac{k}{s(s^2+4s+5)}\Big|_{s=-1}=0 \rightarrow k=\frac{50}{27}$$
$$1+\frac{k}{s(s^2+4s+5)}\Big|_{s=-\frac{5}{3}}=0 \rightarrow k=2$$

$$\Rightarrow \frac{50}{27}<k<2$$

۵) هدف این سوال آشنایی با ابزار sisotool متلب و طراحی یک کنترلگر پسفاز (Lag) به کمک آن است. در سیستم با فیدبک منفی زیر، مقدار k را به گونه‌ای بیابید که زمان نشست ۵ ثانیه (حاشیه ۲٪) شود. در این حالت مقدار k و میزان فراجهش سیستم را اعلام کنید.



$$G(s)=\frac{s+1}{(s+0.5)(s-0.1)(s-1)}$$

$$G_c(s)=\frac{k(0.2s+1)}{(0.1s+1)}$$

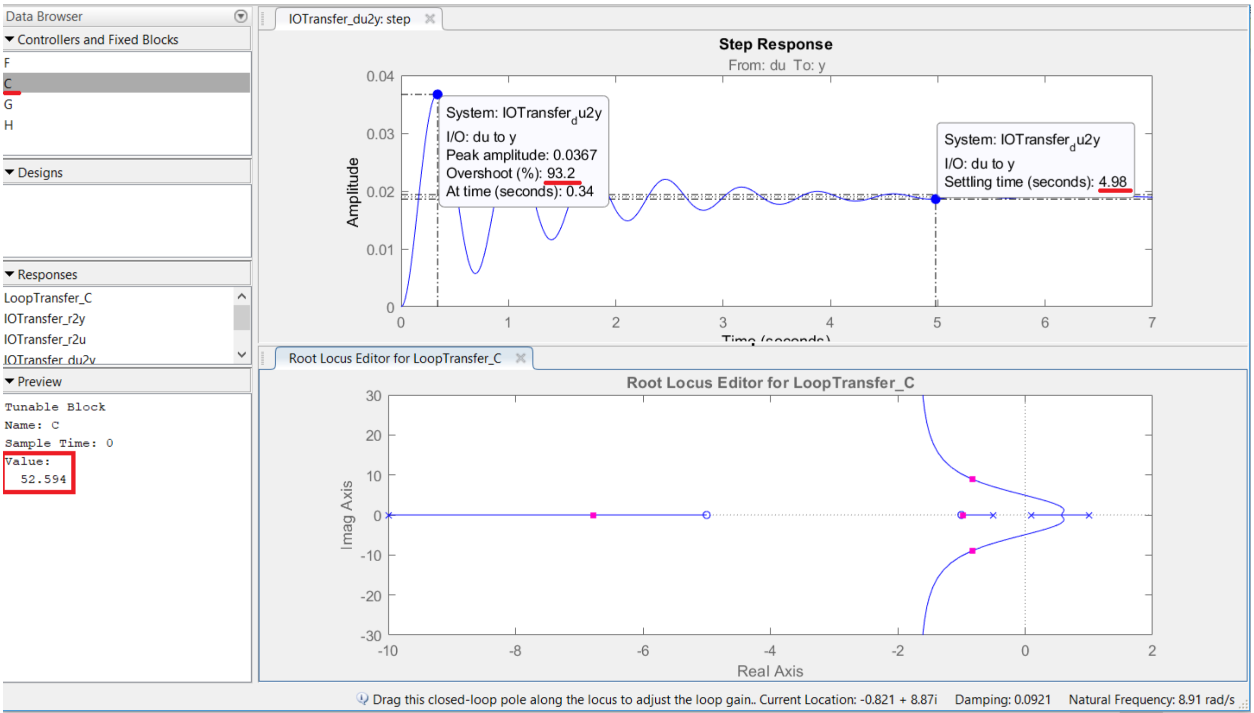
پاسخ:

ابتدا در متلب توابع تبدیل را مشخص میکنیم و سپس دستور sisotool را با تابع تبدیل حلقه‌باز فراخوانی می‌کنیم:

```
%Plant:
num = [1 1];
den = conv([1 0.5] , conv([1 -1],[1 -0.1]));
G = tf(num , den);

%Controller:
num = [0.2 1];
den = [0.1 1];
Gc = tf(num , den);

%Open loop transfer function:
H = series(G , Gc);

% to satisfy the constraint on settling time, I used sisotool:
sisotool(H)
```

در محیط sisotool یک نمودار مکان هندسی ریشه‌ها و یک نمودار پاسخ ضربه را در نظر می‌گیریم (از قسمت New Plot در نوار بالا نمودارهای دلخواه را اضافه کنید).

با جابه‌جا کردن محل قطب‌ها، میزان فراجهش را تنظیم می‌کنیم. برای خواندن مقدار k، مقدار تابع تبدیل C را از سمت چپ میخوانیم.



مقدار k مطلوب ۵۲.۶ و فراجش ۹۳٪ است.

۶) تابع تبدیل سیستم حلقه‌باز سیستمی به صورت زیر است. چه تعداد k وجود دارد که نرخ میرایی (ξ) سیستم حلقه بسته به ازای آن برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ شود. روش به دست آوردن پاسخ را بنویسید. (برای به درست آوردن تقریب مرتبه ۲ سیستم از قطب غیر غالب صرف نظر کنید).

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+12)}$$

پاسخ:

از فصل قبل می‌دانیم در سیستم مرتبه دو رابطه $\cos\phi = \xi$ بر قرار است. برای اینکه به ازای k مقدار نرخ میرایی برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ شود، باید نیمساز ربع‌های سمت چپ نمودار مختلط مکان هندسی را قطع کند.

رسم مکان هندسی ریشه‌ها:

ابتدای برای $k > 0$:

محل خروج:

$$\frac{\partial G(s)}{\partial s} = 0 \ \rightarrow s^2(s+12) - (s+1)(3s^2+24s) = 0 \rightarrow 2s^3 + 15s^2 + 24s = 0$$

$$\rightarrow s = 0, -2.31, -5.18$$

مجانب‌ها:

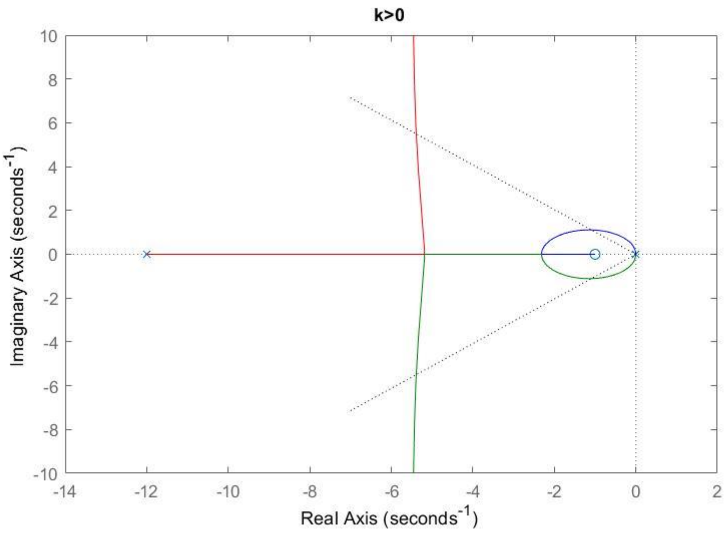
$$\sigma = \frac{0-12+1}{3-1} = -5.5$$

$$\theta_l = \frac{(2l+1)\pi}{3-1} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

زاویه خروج از قطب مبدا:

$$180 - (\theta + \theta + 180) = (2k+1)180 \rightarrow \theta = 90$$

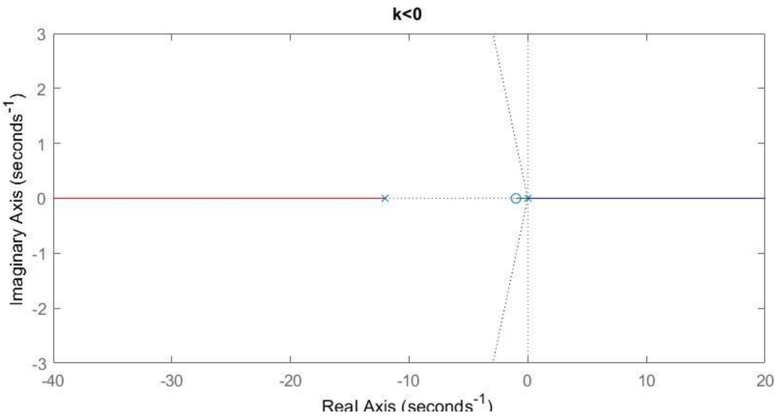
نمودار:



با توجه به نمودار مکان هندسی ریشه ها می‌بینیم که برای k مثبت، ۲ مقدار k وجود دارد که نرخ میرایی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌شود. (توجه داشته باشید که محاسبه زاویه خروج از قطبی که در مبدا قرار دارد، بسیار مهم است. در صورتی که زاویه خروج کمتر از ۴۵ درجه بود، نیمسازها بیضی را قطع نمی‌کردند و آن وقت فقط یک k برای جواب مسئله وجود میداشت.)

برای $k < 0$:

مکان هندسی به فرم زیر است و k منفی وجود ندارد که شرط گفته شده را برقرار سازد.



۷) تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید. با استفاده از روش مکان هندسی ریشه‌ها مقدار بهره‌ای که سیستم حلقه‌بسته با فیدبک واحد منفی به نوسان در می‌آید را بدست آورید.

$$kG(s) = \frac{k(s+20)}{s(s^2+24s+144)}$$

پاسخ:

$k > 0$:

محل خروج:

$$\frac{\partial G(s)}{\partial s} = 0 \ \rightarrow 1(s^3 + 24s^2 + 144s) - (s + 20)(3s^2 + 48s + 144) = 0$$
$$\rightarrow 2s^3 + 84s^2 + 960s + 2880 = 0 \ \rightarrow s = -4.75, -25.25, -12$$
$$s = -4.75 \ \text{ is valid for } k > 0$$

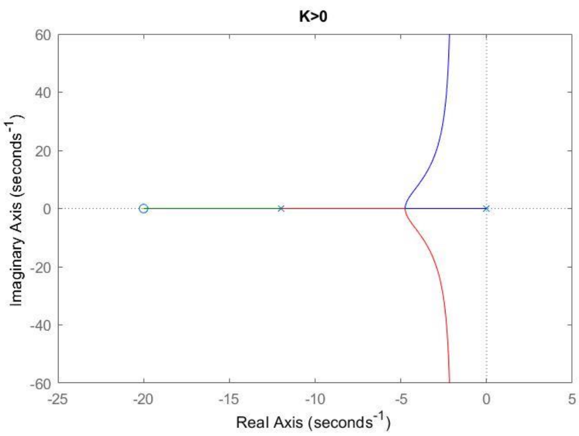
مجانب‌ها:

$$\sigma = \frac{-12 - 12 + 20}{3 - 1} = -\frac{4}{2} = -2$$
$$\theta_l = \frac{(2l + 1)\pi}{3 - 1} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

زاویه خروج از قطب مبدا:

$$180 - (\theta + \theta + 180) = (2k + 1)180 \rightarrow \theta = 90$$

نمودار:



برای دانستن مقدار بهره که به ازای آن پاسخ نوسانی می‌شود باید، k در محل خروج را دانست. با توجه به شرط اندازه مقدار k را به دست می آوریم:

$$k^* = \frac{|0 - 4.75| \ \times |12 - 4.75| \ \times |12 - 4.75|}{|20 - 4.75|} = 16.37$$

پس:

$0 < k \leq 16.37$: قطب‌ها حقیقی‌اند. پاسخ فرامیرا (یا میرایی مرزی) است و نوسانی نیست.

$k > 16.37$: قطب‌ها مختلط‌اند. پاسخ فرومیراست و نوسانی میراشونده است.

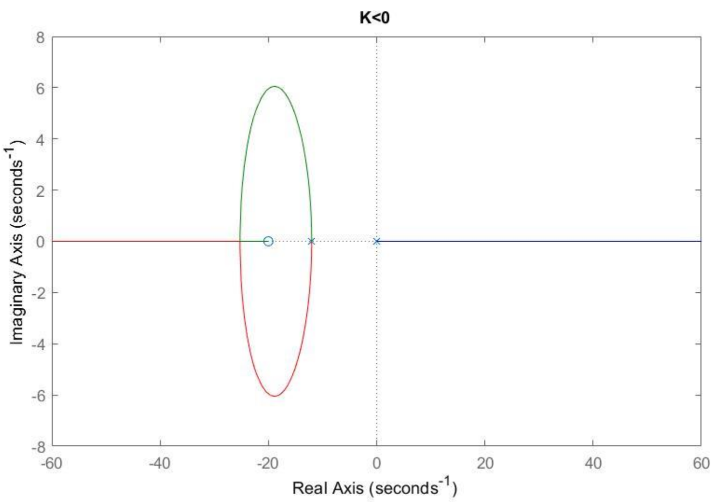
:$K < 0$

محل خروج:

$$s = -25.25, -12 \ \text{ valid for } k < 0$$

مجانب‌ها: مانند $k > 0$.

نمودار:



برای $k < 0$ سیستم ناپایدار و در نتیجه نوسانی نامیرا است.

۸) مکان هندسی ریشه های سیستم زیر به ازای $k < 0$ به چه صورت است؟

$$GH(s) = \frac{k}{(s+3)(s^2+3)}$$

پاسخ:

مجانب ها:

$$\sigma = \frac{-3 + j\sqrt{3} - j\sqrt{3}}{3-0} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$\theta_l = \frac{2l\pi}{3-0} = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi$$

محل خروج:

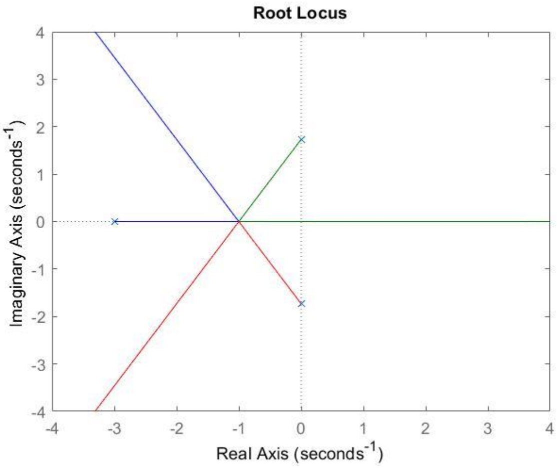
$$\frac{\partial G(s)}{\partial s} = 0 \ \rightarrow 0 - (3s^2 + 6s + 3) = 0 \rightarrow 3(s+1)^2 = 0 \ \rightarrow s = -1$$

زاویه خروج از قطب مختلط:

$$0 - (-60 - 90 - \theta) = 2k\pi \rightarrow \theta = 360 - 150 = 210 = \ -150$$

با توجه به منفی بودن k و محل قرارگیری قطب‌ها، سمت راست ۳- از محور حقیقی، جزو مکان هندسی است.

نمودار:



۹) سیستمی که دارای فیدبک واحد است و تابع تبدیل حلقه‌باز زیر را دارد، در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$

اگر میزان نوسان سیستم به ازای $\zeta = 0.591$ تنظیم شده باشد، با استفاده از مکان ریشه، میزان حساسیت قطب‌های سیستم حلقه‌بسته را به ازای پارامتر K محاسبه کنید. (حساسیت: $\left(S_{s:K} = \left(\frac{K}{s}\frac{\partial s}{\partial K}\right)\right)$

پاسخ:

تابع تبدیل حلقه‌بسته به صورت زیر قابل استخراج است:

$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 5s + K}$$

پس فرم دیفرانسیلی معادله مشخصه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$3s^2\frac{\partial s}{\partial K} + 12s\frac{\partial s}{\partial K} + 5\frac{\partial s}{\partial K} + 1 = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial K} = \frac{-1}{3s^2 + 12s + 5}$$

در نتیجه حساسیت s به k به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$S_{s:K} = \frac{K}{s}\frac{\partial s}{\partial K} = \frac{1}{s}\left(\frac{-K}{3s^2 + 12s + 5}\right)$$

با ترسیم و بررسی دقیق نمودار مکان ریشه، می‌توان فهمید که:

$$\zeta = 0.591 \rightarrow s = -0.435 + 0.593j \rightarrow K = 2.7741$$

با جایگذاری مقدار بهره و قطب فوق در معادله حساسیت داریم:

$$S_{s:K} = \left(\frac{K}{s}\frac{\partial s}{\partial K}\right)\Big|_{s=-0.435+0.593j,K=2.7741} = 0.487 - j0.463 = 0.672\angle -43.553^\circ$$

۱۰) می‌دانیم معادله $x^3 + 7x^2 + 12x + k = 0$ همواره سه ریشه دارد. ریشه‌های این معادله را برای $k =$ 2,3,4,5 حساب می‌کنیم و سپس k را ۵ درصد افزایش می‌دهیم به ازای کدام مقدار k بیشترین تغییرات در محل ریشه‌ها حاصل می‌شود؟

پاسخ:

می‌دانیم که حساسیت ریشه‌ها در نقطه شکست بینهایت است. بنابراین ابتدا معادله داده شده را به فرم استاندارد مکان ریشه‌ها در می‌آوریم.

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{x^3 + 7x^2 + 12x} = 1 + \frac{k}{x(x+3)(x+4)} = 0$$

حال نقاط شکست مکان ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$P'(x)Q(x) = P(x)Q'(x)$$

$$3x^2 + 14x + 12 = 0 \Rightarrow x \cong -1.1315, -3.5352$$

با توجه به این که بازه $(-3,-4)$ جز مکان ریشه‌های مثبت نیست لذا $x = -3.5352$ نقطه شکست نیست مقدار K در نقطه شکست $x \cong -1.1315$ نیز برابر است با:

$$k = -(x^3 + 7x^2 + 12x) \Rightarrow k|_{x=-1.1315} = 6.06$$

با توجه به k به دست آمده برای نقطه شکست و با در نظر گرفتن حساسیت ریشه‌ها در نقطه شکست، هرچه به مقدار نقطه شکست نزدیک‌تر باشد، تغییرات در ریشه‌ها افزایش می‌یابد. بنابراین مقدار ۵ پاسخ سوال است.

۱۱) چند ریشه معادله مشخصه $\Delta(s) = s^4 + 4s^3 - 2s - 6$ در ناحیه $-2 > Real(s) > 0$ قرار گرفته اند؟

پاسخ:

آرایه راث را برای $\Delta(p-0)$ و $\Delta(p-2)$ تشکیل می دهیم:

$$\Delta(p-0) = p^4 + 4p^3 - 2p - 6$$

$$\Delta(p-2) = (p-2)^4 + 4(p-2)^3 - 2(p-2) - 6 = p^4 - 4p^3 + 14p - 18$$

$\Delta(p-0)$

p^4	1	0	−6
p^3	4	−2	−
p^2	0 · 5	−6	−
p^1	−46	−	−
p^0	−6	−	−

$\Delta(p-2)$

p^4	1	0	−18
p^3	−4	14	−
p^2	3 · 5	−18	−
p^1	−19 · 5	−	−
p^0	−18	−	−

همانطور که مشاهده می کنیم در ستون اول $\Delta(p-0)$ یک بار علامت تغییر کرده است؛ بنابراین از ۴ ریشه سیستم، یک ریشه در سمت راست محور موهومی قرار دارد و ۳ ریشه در سمت چپ آن.

در $\Delta(p-2)$ سه بار علامت تغییر کرده است؛ که نشان می دهد از ۳ ریشه ای که در سمت چپ محور موهومی قرار دارد، هر ۳ در سمت راست خط real=-2 قرار دارد.

۱۲) برای سیستم با فیدبک واحد منفی زیر مکان ریشه را به طور کامل با تمام محاسبات رسم کنید. نقاط شکست مختلط و زوایای خروج آنها را بدست بیاورید.

$$G(s)=\frac{3s^2+2s}{(s-1)^2(s^2+6s+4)}$$

پاسخ:

داریم:

زاویه مجانب‌ها $\theta=+\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$ ،   محل تلاقی مجانب‌ها: $-\frac{5}{3}$

برای بدست آوردن نقاط شکست داریم که:

$$\frac{3s^2+2s}{s^4+4s^3-7s^2-2s+4}\rightarrow\frac{6s+2}{4s^3+12s^2-14s-2}$$
$$\rightarrow 12s^5+44s^4-18s^3-34s^2-45=6s^5+26s^4-34s^3-26s^2+20s+8$$
$$6s^5+18s^4+16s^3-8s^2-24s-8=0$$
$$\rightarrow s=-1.577, s=-1-j, s=-1+j, s=1, s=-0.422$$

همه‌ی این مقادیر کاندیدایی برای نقاط شکست برای $k>0$ می‌باشند. با قرار دادن در معادله مشخص می‌شود که پنج نقطه شکست وجود دارد. برای بدست آوردن محل تلاقی با محور موهومی جدول راث را تشکیل داده و در این صورت با نوشتن معادله کمکی داریم که:

$$k=3.76\rightarrow(5\times 3.76-13)s^2+8=0\rightarrow s=+1.17j,-1.17j$$

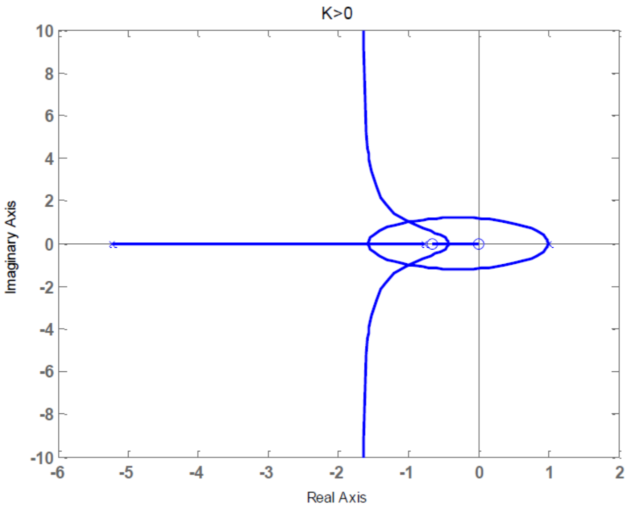
در نهایت به محاسبه زوایای ورود و خروج نقاط شکست مختلط می پردازیم که به دلیل تقارن کافی است این کار را برای $-1+j$ انجام دهیم.

$$-1+j\rightarrow G(s)=0.2$$
$$1+kG(S)=0\rightarrow k=5$$

با نوشتن شرط زاویه.

$$-2\theta-2\left[\frac{\pi}{2}\right]+\left[\pi-\tan^{-1}\frac{3}{2}\right]+\frac{3\pi}{4}=\pm\pi$$
$$2\theta=\pm\pi+1.37$$
$$\theta_1=130,\theta_2=-50$$

این زوایا برای k مثبت هستند لذا زاویه خروج را بدست می‌دهند. برای زوایای ورود باید k منفی را در نظر بگیریم . ولی واضح است که زوایای ورود ۹۰ درجه اختلاف دارند . لذا: $\theta_3=40,\theta_4=-140$



موفق باشید.